

質点系と剛体の運動について

KENZOU

2005年×月×日

力学の基礎である質点系と剛体の運動について少し整理してみようかなと思い立ち（その理由はよく分からないが：笑い）、以下のレポートと相成った次第。式の変形はできるだけ細かいところまでフォローしているので、目で追っても分かると思う（つもり）。

1 運動の自由度

空間を自由に動く質点を記述するには $x - y - z$ の3つの座標の指定しなければならない。2質点系では各質点の $x - y - z$ （あるいは $r - \theta - \phi$ ）を指定しなければならないから、合計6つの変数が必要となる。一般に N 個の質点系では $3N$ 個の変数が必要となる。系を既述するのに必要な変数の数を自由度という。 N 個の質点系の自由度は $3N$ である。

この系に運動を制限する条件、いわゆる束縛条件（拘束条件）が r 個ある場合、自由度は独立な束縛条件の数だけ減り、 $3N - r$ 個となる。

2 質点系の運動

2.1 運動方程式

n 個よりなる質点系を考える。質点 m_i の位置 \mathbf{r}_i 、運動量 \mathbf{p}_i 、系内の質点 i, j 相互に働く内力 \mathbf{F}_{ji} 、系外から質点 i に作用する外力 \mathbf{F}_i とすると、各質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

もっと具体的に書くと

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots \\ m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &= \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2.1)の辺々を加え、作用反作用の関係（*Newton* の運動の第3法則） $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ を考慮すると次式を得る。

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_i \quad (3)$$

2.2 運動量

式 (3) の左辺は各質点の運動量 $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ の和であるから、これを \mathbf{P} と書いて質点系の運動量と定義すれば

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i^n \mathbf{F}_i \quad (4)$$

これから、質点系の運動量の時間変化の割合は、この系に作用する外力の和に等しいということになる。また、外力が作用しない質点系（閉じた系）では、 $\mathbf{F}_i = 0$ となるから $\mathbf{P} = \text{一定}$ となる。つまり、外力が作用しない質点系ではその運動量は時間変化に対して不変である（運動量保存則）ということが導かれる。

2.3 角運動量

次に、質点系の角運動量の時間変化はどのように表されるだろうか、これを調べてみよう。質点 m_i の原点 O の周りの角運動量は $\mathbf{L}_i (= \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$ と表される。個々の質点の角運動量の時間変化は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots) \\ \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots) \\ \frac{d\mathbf{L}_3}{dt} &= \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

辺々加え合わせると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \quad (6)$$

となる。ここで \mathbf{L} は系の全角運動量で、 \mathbf{N} は原点周りの外力のモーメントである。式 (6) が我々が求めようとしていた方程式である。大変すっきりした形になった。特に、外力が作用しない閉じた系では $\mathbf{F}_i = 0$ 、つまり $\mathbf{L} = \text{一定}$ となって角運動量が保存される（角運動量保存則）ことが分かる。

2.4 エネルギー

式 (1) の運動方程式に $\dot{\mathbf{r}}_i$ を掛け、これらを加え合わせると

$$\left. \begin{aligned} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) = \dot{\mathbf{r}}_i \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \right) \\ \frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2) &= \sum_i \left[\dot{\mathbf{r}}_i \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} \right) \right] \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで \mathbf{F}'_i は質点 m_i に作用する内力の総和である。さて、時刻 t_0 から t に掛けて積分すると

$$\left[\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \left[\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] dt \quad (8)$$

式 (8) の右辺は内力及び外力の時刻 t_0 から t の間になした仕事の和 W 、 W' を表している。また、右辺は質点系の時刻 t と t_0 における全運動エネルギーの差 ($T - T_0$) である。

$$T - T_0 = W + W' \quad (9)$$

内力がポテンシャル U' を有するとき、質点 m_i に働く内力の、 x, y, z 成分は

$$-\frac{\partial U'}{\partial x_i}, \quad -\frac{\partial U'}{\partial y_i}, \quad -\frac{\partial U'}{\partial z_i} \quad (10)$$

であるから、内力のなした仕事 W' は

$$\left. \begin{aligned} W' &= \int_{t_0}^t \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sum_i \left(-\frac{\partial U'}{\partial x_i}, -\frac{\partial U'}{\partial y_i}, -\frac{\partial U'}{\partial z_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= -(U'[t] - U'[t_0]) \\ &= -(U' - U'_0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$T + U' = E$ とすれば式 (9) と (11) より

$$\left. \begin{aligned} T - T_0 &= W - (U' - U'_0) \\ (T - U') - (T_0 - U'_0) &= W \\ E - E_0 &= W \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これから、ある時間内の質点系のエネルギーの増加は、その時間に働く外力のなした仕事の和に等しい、ということになる。尚、 E は質点系の全エネルギー、 U' を内部エネルギーと呼んでいる。外力が作用しない閉じた系では $E = \text{一定}$ となり、エネルギー保存則が成り立つ。外力がポテンシャル U から導かれるときには、上の議論と同様にして

$$E + U = \text{一定} \quad (13)$$

となる。

3 重心座標系から見た質点系の運動

今までは空間に固定された原点から個々の質点の運動を見てきた。ここで視点を変えて、質点系の重心を原点とする重心座標系から運動方程式を見直してみよう。こうすることの^{りやく}ご利益はすぐあとで分かる。

3.1 重心座標系

質点系の運動を考えると、最も都合のよい座標系が重心座標系である。ところで、まず最初は重心が座標原点からみてどのように運動するかを調べてみよう。

重心 (または質量中心) の位置を \mathbf{R} 、全質量を M とすると、 \mathbf{R} は次式で定義される。

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m m_i \mathbf{r}_i / M, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (14)$$

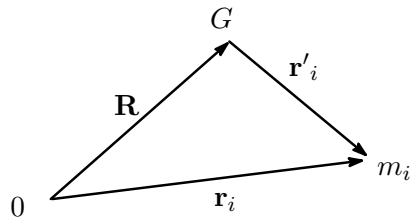


図 1: 重心 G に対する位置 (重心座標系)

3.2 運動量

重心の速度を \mathbf{V} とすると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} / M = \sum m_i \mathbf{v}_i / M \\ &= \mathbf{P} / M \\ \mathbf{P} &= \sum m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{V} \text{ (質点系の全運動量)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となつて、重心の運動方程式は

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i \quad (16)$$

となり、式 (4) と同じ式がでてくる。これから次のことが言える。

- a) 質点系の運動は系の全質量とすべての外力が重心に集中したと考えたときの運動に等しい。つまり、重心の運動は外力のみによって決まり、内力には無関係である。
- b) 外力が作用しない質点系 (閉じた質点系という) または外力の総和が 0 となる質点系では全運動量は保存され、従つて重心の速度は一定である。

さて、いよいよ重心を原点とした重心座標系で質点系の運動を記述してみよう。重心に対する相対座標を \mathbf{r}'_i とすると、図 (1) から

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad (17)$$

重心を原点とする重心系座標での運動量 \mathbf{p}'_i は

$$\mathbf{p}'_i = m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \mathbf{p}_i - m_i \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (18)$$

となる。次に、式 (17) の両辺に m_i を掛け、 i について総和をとつて式 (14) を利用すると

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R} = M\mathbf{R} \quad (19)$$

$$= \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (20)$$

が得られる。これから

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = 0 \quad (21)$$

この関係式は後で利用するので覚えておこう。

3.3 運動エネルギー

式 (17) より、

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i, \quad \mathbf{v}' : \text{重心 } G \text{ に対する (重心座標系での) 速度} \quad (22)$$

質点系の全運動エネルギー K は

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}'_i{}^2 + (\sum m_i \mathbf{v}'_i) \mathbf{V} \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}'_i{}^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。ここで式 (21) を使った。

質点系の全運動エネルギーは「重心の運動エネルギー + 重心座標系での各質点の運動エネルギーの総和」で表されることが分かる。つまり、2つの項に分離できるというわけである。

3.4 角運動量

次に、全角運動量 \mathbf{L} を重心座標系で表してみよう。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right) \\ &= M \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \\ &= M \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{R} \right) + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \\ &= \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \\ &= \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}' \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで $\mathbf{L}_0 = \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$, $\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$ である。尚、式 (24) の展開でベクトル外積の公式 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ を使った。全角運動量の時間変化の方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{L}'}{dt} \\ \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} &= \mathbf{N}_0; \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \\ \frac{d\mathbf{L}'}{dt} &= \mathbf{N}'; \quad \mathbf{N}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となり、ここでも重心の原点周りの角運動量の時間変化と重心を原点とする角運動量の時間変化の和という2つの項に分離できることが分かる。

4 質点系力学の締めくくり

質点系力学のお話の締めくくりとして、2、3の問題を取り扱ってみよう。

4.1 2体問題

相互に作用を及ぼしあう2個の質点 m_1, m_2 の運動を調べてみよう。2質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする。質点 m_1 から m_2 に向かうベクトルは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ であるから、この方向に沿って作用する力を $F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ とすれば、 m_1 が m_2 に及ぼす力は $-F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ と書ける（力の大きさは $F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ である）。運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(26)の辺々加えると、 \mathbf{R} を重心の位置ベクトルとして

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0 \\ \text{これから} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。すなわち、重心は等加速度運動を行う。次に、式(26)の差をとると、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ として

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\mu} F(\mathbf{r}), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これから

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F(\mathbf{r}) \quad (29)$$

を得る。

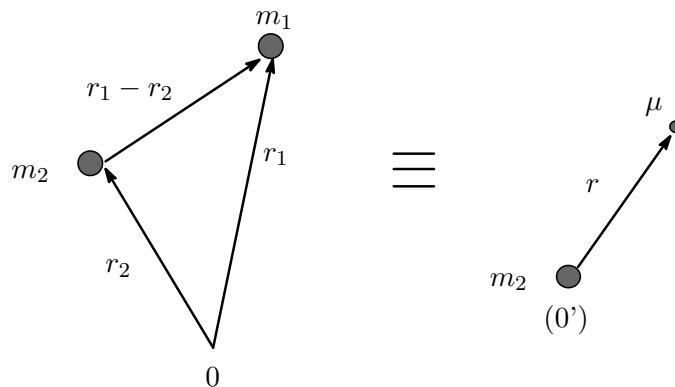


図 2: 2体問題

これは質点 m_2 の運動を考慮したときの質点 m_2 に対する質点 m_1 の相対運動は、質量 μ なる質点が固定点 \mathbf{r}_2 から同形の中心力に結ばれているときの運動方程式と同じであることを意味している¹。

¹手っ取り早く言うと、質点 m_2 の周りを質量 μ の質点が F の作用を受けて行う運動と同じということ。

つまり、閉じた系での2つの質点の運動は、一方の質点は他の質点に対し $\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ で定められる質量 μ を持つ質点と同じ運動をするということになる。この μ を換算質量と呼んでいる。地球の質量は $m_2 = 5.98 \times 10^{24}$ kg、月の質量は $m_1 = 7.35 \times 10^{22}$ kg、これから、地球と月の換算質量は $\mu = 7.26 \times 10^{22}$ kg とする。地球に対する月の運動は、地球が固定されていて月の質量が μ であるときの運動に等しいということになる。

次にこの2質点系の角運動量 L と運動エネルギー T を求めてみよう。

$$\left. \begin{aligned} L &= \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \\ T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

より

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2} \rightarrow m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 = \mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2} \rightarrow m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = -\mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{r}_1 \times (\mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{r}_1 \times \mu \dot{\mathbf{r}} + m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{r}_2 \times (-\mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \dot{\mathbf{R}}) = -\mathbf{r}_2 \times \mu \dot{\mathbf{r}} + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

これから

$$\left. \begin{aligned} L &= \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \\ T &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2, \quad M = m_1 + m_2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

これらの結果はセクション 3.3、3.4 で述べた通りである。

4.2 質量の変わる物体の運動

ガスを噴射しつつ進むロケットや落下する雨滴の運動などは質点系の運動とみなすことができる。

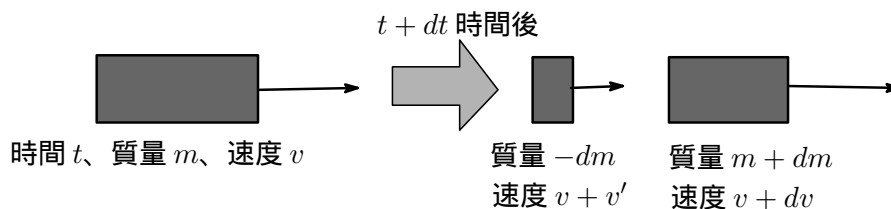


図 3: 質量の変化する物体の運動

質量が減少するケース（ロケットの運動）

時刻 t での物体の質量を $m(t)$ 、速度を $v(t)$ 、 dt 時間後に質量 $dm (< 0)$ が速度 v' で物体からはなれて飛び出すとする。時刻 t でのこの系の運動量 P_t は

$$P_t = mv \quad (34)$$

$t + dt$ におけるこの系の運動量 \mathbf{P}_{t+dt} は $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ と飛び出し素片の運動量 $\mathbf{v}'(-dm)$ が \mathbf{v}' の和であるから

$$\mathbf{P}_{t+dt} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{v}'dm \quad (35)$$

運動量の変化はこの系に働く外力の力積 $\mathbf{F}dt$ に等しいから

$$\mathbf{P}_{t+dt} - \mathbf{P}_t = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{v}'dm - m\mathbf{v} = md\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}')dm = \mathbf{F}dt \quad (36)$$

これから

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}, \quad (\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}') \quad (37)$$

これが求める運動方程式である。ここで \mathbf{u} は分離後の親物体に対する飛び出し素片の相対速度で、式(37)の右辺第2項は飛び出した素片からの反作用力となる。

この方程式を一様重力場の中を鉛直方向に打ち上げられたロケットに適用してみよう。単位時間に α の割合で後方に一定質量のガスを相対速度 \mathbf{u} で噴射しつつロケットが上昇するとすると、運動方程式は、時刻 t におけるロケットの質量 m は初期値を m_0 とし $m = m_0 - \alpha t$ となるから

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -mg + \alpha \mathbf{u} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -g + \frac{\alpha \mathbf{u}}{m_0 - \alpha t} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

初期値 $t = 0$ で $\mathbf{v} = 0$ を考慮して積分すると

$$\mathbf{v} = -gt - \mathbf{u} \log \left| 1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right| \quad (39)$$

$t = 0$ でロケットの高さ $h = 0$ とすると、もう一度積分して

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\mathbf{u}m_0}{\alpha} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right) \log \left| 1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right| + \frac{\alpha}{m_0} t \right\} \quad (40)$$

質量が増加するケース（雨滴の運動）

次に、質量が増加するケースとして霧の中の雨滴の落下運動を調べてみよう。霧の付着による雨滴の質量増加の時間的割合はその雨滴の表面積に比例するとする。ただし、霧は静止しているものとし、空気抵抗は無視する。 $t = 0$ で雨滴の半径 $r = a$ 、鉛直下方の速度 v_{0x} 、水平方向の速度を v_{0y} であったとしよう。

半径 r の雨滴の質量は水の密度を 1 とし $m = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。雨滴の質量増加の時間的割合は比例係数を k とし

$$\frac{dm}{dt} = k4\pi r^2 \quad (41)$$

これから

$$dr = kdt \quad (42)$$

が得られる。雨滴の運動方程式は鉛直方向 (x 方向) を正の方向にとって

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = mg \quad k \frac{d}{dr}(r^3 v) = r^3 g \quad (43)$$

積分して

$$kr^3 v_x = \frac{r^4}{4} g + C, \quad C \text{ は積分定数} \quad (44)$$

$t = 0$ で $v_x = v_{0x}, r = a$ とすると $C = ka^3v_{0x} - \frac{a^4}{4}g$ が得られる。これを上式に入れて整理すると

$$v_x = \frac{g}{k} \frac{r}{4} + \frac{a^3}{r^3} \left(v_{0x} - \frac{g}{k} \frac{a}{4} \right) \quad (45)$$

水平方向 (y 方向) の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(mv_y) = 0 \quad mv_y = C', \quad C' \text{ は積分定数} \quad (46)$$

$t = 0$ で $v_y = v_{0y}, r = a$ とすると $C = \frac{4}{3}\pi a^3 v_{0y}$ が得られる。これを上式に入れて整理すると

$$v_y = \frac{a^3}{r^3} v_{0y} \quad (47)$$

$v_x = \frac{dx}{dt} = k \frac{dx}{dr}$ の関係式を使うと式 (45) は

$$\frac{dx}{dr} = \frac{g}{k^2} \frac{r}{4} + \frac{a^3}{kr^3} \left(v_{0x} - \frac{g}{k} \frac{a}{4} \right) \quad (48)$$

積分して

$$x = \frac{a^4 g}{8k^2 r^2} + \frac{gr^2}{8k^2} - \frac{a^3 v_{0x}}{2kr^2} + C \quad (49)$$

が得られる。 $t = 0$ で $x = x_0, r = a$ として積分定数を求め、上式を整理すると

$$x = \frac{ga^2}{8k^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^2}{r^2} - 2 \right) + \frac{a}{2k} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) v_{0x} + x_0 \quad (50)$$

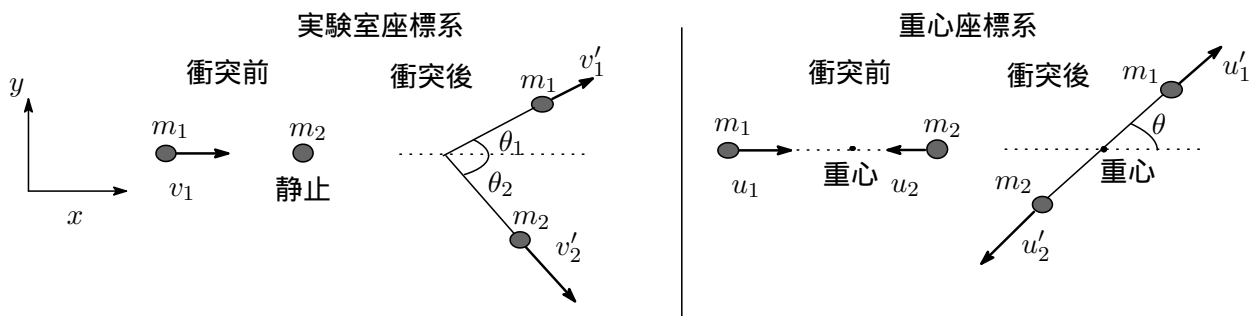
全く同様にして

$$y = \frac{a}{2k} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) v_{0y} + y_0 \quad (51)$$

が得られる。あと、 $X = x - x_0, Y = y - y_0$ において上の 2 式から r を消去すると雨滴の軌跡の方程式がでるが、これは読者にお任せする。

4.3 2 粒子の衝突

静止した質量 m_2 の質点に初速度 v_1 で質量 m_1 の質点が完全弾性衝突し、衝突後、質点 m_1, m_2 はそれぞれ θ_1, θ_2 の方向に散乱したとしよう。2 質点の衝突を空間に固定された座標系 (実験室系) から見た場合と重心を原点とする座標系 (重心系) から見た場合を図に示す。



2 質点の衝突前は、その距離が次第に縮まってくるから、重心系に載ってこの様子を眺めると質量 m_2 の質点が重心に迫ってくるように見える。重心に対する相対速度を \mathbf{u}_2 、質量 m_1 の重心に対する相対速度を \mathbf{u}_1 とし、実験室系から見た重心の速度を \mathbf{V} とすると速度の合成則²より

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \\ \mathbf{u}_2 &= 0 - \mathbf{V} \\ \mathbf{V} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

衝突後、2 質点は互いに離れていくが、重心系から眺めると一つの直線上を互いに逆方向に遠ざかっていくように見える³。2 質点の遠ざかる速度をそれぞれ \mathbf{u}'_1 、 \mathbf{u}'_2 とする。この質点系には外力が作用していないのでこの系の運動量は保存される⁴。

運動量の保存

実験室系での運動量保存の式を x, y 方向に分けて書くと

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v'_1 \cos \theta_1 + m_2 v'_2 \cos \theta_1 \\ 0 &= m_1 v'_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

一方、重心系では式 (21) により、この系の運動量の総和は 0 であるから、

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{u}'_1 + m_2 \mathbf{u}'_2 = 0 \quad (54)$$

つまり、

$$\left. \begin{aligned} m_1 \mathbf{u}_1 &= -m_2 \mathbf{u}_2 \\ m_1 \mathbf{u}'_1 &= -m_2 \mathbf{u}'_2 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

で、重心系での 2 質点の運動量は大きさが同じで向きが反対である⁵。

エネルギーの保存

完全弾性衝突であるから系の運動エネルギーは衝突の前後で保存される。

実験室系では

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (56)$$

重心系では

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \quad (57)$$

式 (57) の左辺は式 (52) を使うと

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{1}{2} \mu v_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

²Galilei 変換：ある物体の位置を \mathbf{r} で示し、その座標系に対して速度 \mathbf{V} で動いている座標系におけるその物体の座標を \mathbf{r}' とするとき $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{V}t$, $\frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - \mathbf{V}$ が成り立つ。

³重心は 2 質点を結ぶ直線上に存在するから。

⁴式 (4)、(16) を参照。

⁵そもそもそのように見える座標系の原点が「重心」の定義であったことを思いだそう。

これから重心系での運動エネルギーは $\frac{1}{2}\mu v_1^2$ と書けることがわかる。
式 (57) の右辺を式 (55) を使って変形すると

$$\frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) u_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{\mu} u_1'^2 \quad (59)$$

これから

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\mu v_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{\mu} u_1'^2 \\ \mathbf{u}'_1 &= \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

同様にして

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_2 = -\mathbf{V} \quad (61)$$

が導かれる。

実験室系と重心系の速度と散乱角の関係

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}'_1 + \mathbf{V} &= \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 + \mathbf{V} &= \mathbf{v}'_2 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

より、衝突後の実験室系と重心系の速度の関係を図示すると次のようになる。

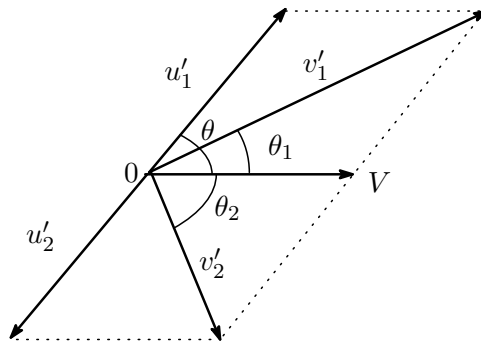


図 4: 実験室系と重心系間の速度・散乱角の関係

$$\left. \begin{aligned} u'_1 \cos\theta + V &= (v'_1 - V) \cos\theta + V = v'_1 \cos\theta_1 \\ u'_1 \sin\theta &= (v'_1 - V) \sin\theta = v'_1 \sin\theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

これから

$$\left. \begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{(v'_1 - V) \sin\theta}{V + (v'_1 - V) \cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\frac{V}{(v'_1 - V)} + \cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

という関係が導かれる。ここで $\frac{V}{(v'_1 - V)} = \frac{m_1}{m_2}$ を利用した。これから

() $m_1 \ll m_2$ のとき、 $\theta_1 \simeq \theta$

() $m_1 = m_2$ のとき、 $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$

() $m_1 \gg m_2$ のとき与式より θ は大変小さな値となる。このとき、 $\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots$ と展開できるので $\theta_1 \simeq \frac{m_2}{m_1} \sin\theta$

4.4 Rutherford 散乱

2 粒子の衝突問題をやったので、ついでにこのセクションの最後として Rutherford 散乱を扱うことにしよう。 α 粒子 (質量 m , 電荷 $2e$) が左遠方より速さ v_0 で入射し、座標原点に静止している原子核 (電荷 Ze) からのクーロン斥力 $f(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ を受けて運動するものとする。

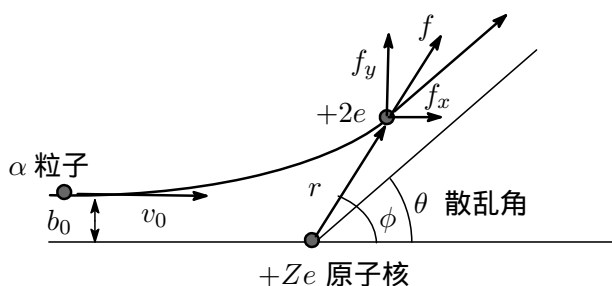


図 5: Rutherford 散乱

Newton の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= f(r) \cos\phi \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= f(r) \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

このままでは取り扱いにくいので極座標 ($x = r \cos\phi$, $y = r \sin\phi$) に変換しよう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos\phi - \frac{d\phi}{dt} r \sin\phi \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin\phi + \frac{d\phi}{dt} r \cos\phi \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos\phi - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \sin\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2} r \sin\phi - \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r \cos\phi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin\phi + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2} r \cos\phi - \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

式 (65) に (66) を代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} m \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] &= f(r) \\ m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

式 (67) の第 2 式を書き直すと

$$m \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = 0$$

となる。これから

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{一定} = L \quad (68)$$

となり、これは角運動量保存則を表している。今、遠方から速度 v_0 で入射してくる α 粒子の角運動量 L は図 (5) より $L = mv_0b$ であるから、式 (68) は

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = v_0b \quad (69)$$

これを式 (67) に代入すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{v_0^2 b^2}{r^3} = \frac{1}{m} f(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \quad (70)$$

これを解けば $r = r(t)$ が求められる。それを式 (69) に代入すると ϕ の従う微分方程式が得られ、それを解くことで解 $\phi(t)$ が得られる。が、これは少し回りくどいやり方なので、ここでは r が ϕ を通して t の関数であるということを使って計算を進めてみよう。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{v_0b}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \quad (71)$$

となる。ここで $u = \frac{1}{r}$ とおくと

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \quad (72)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -v_0b \frac{du}{d\phi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -v_0b \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} = -v_0b \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{v_0b}{r^2} = -\frac{v_0^2 b^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\phi^2} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

これを式 (70) に代入すると

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = - \left(u + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v_0^2 b^2} \right) \quad (74)$$

が得られる。右辺の括弧内を w とおくと式 (74) は、もっとも簡単な単振動の方程式

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} = -w$$

に還元できる。この微分方程式の一般解は $w = A\cos(\phi + \alpha)$ であるから

$$\frac{1}{r} = A\cos(\phi + \alpha) - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v_0^2 b^2} \quad (75)$$

式 (75) が α 粒子の軌道方程式である。解 (75) の中の定数 A と α は初期条件から決められる。両辺を t で微分し、整理していくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) &= -A\sin(\phi + \alpha) \frac{d\phi}{dt} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} &= -A\sin(\phi + \alpha) \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= -Av_0b\sin(\phi + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ここで $r = -\infty, \phi = \pi$ において $\frac{dr}{dt} = -v_0$ であるからこれらを式 (75)(76) に入れると

$$\left. \begin{aligned} A\cos\alpha &= -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v_0^2 b^2} \\ A\sin\alpha &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

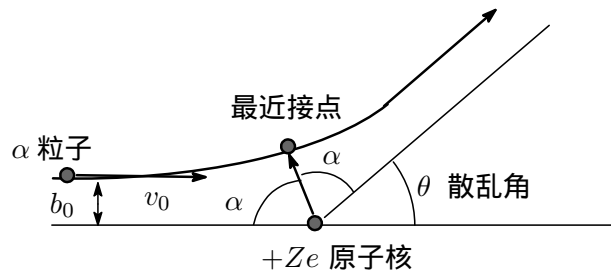
となるから

$$\tan \alpha = \frac{4\pi\epsilon_0 M v_0^2 b^2}{2Ze^2} \quad (78)$$

となり、定数 α はこの式から求めることができる。その結果と式 (79) を使って定数 A が求まる。

最近接距離

左遠方 ($r = -\infty, \phi = \pi$) から入射した α 粒子は右方向に進むにつれて角度 ϕ は π から減少し、原子核 (原点) に最も近い最近接点を通過して遠方に遠ざかっていく。最近接点は原点からの距離 (r_{min}) が最小となり、動径方向の速さが $dr/dt = 0$ の点である。従って式 (76) より最近接点の角度 ϕ を求めると、 $\phi = \pi - \alpha$ となる。尚、 b_0 を衝突パラメータと呼んでいる。



最近接距離 r_{min} は α 粒子の軌道の式 (75) から求めることができるが、ここではエネルギー保存則から求めることとする。エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (79)$$

左辺第 1 項は最近接点では 0、第 2 項は式 (69) より $v_0^2 b^2 / r_{min}^2$ となる。式 (79) に入れて整理すると

$$r_{min}^2 - \left(\frac{4k}{mv_0^2} \right) r_{min} - b^2 = 0, \quad k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (80)$$

r_{min} に関する 2 次方程式を解くと

$$r_{min} = \frac{k}{E} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{Eb}{k} \right)^2} \right], \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (81)$$

5 剛体の運動

剛体の運動を調べる前に、その下準備として回転座標軸におけるベクトル \mathbf{A} の時間変化を調べる。

5.1 回転運動をなす座標軸

ある軸の周りに剛体が角速度 \mathbf{w} で回転しているとき、剛体内の一点 P の速度 \mathbf{v} を求めてみよう⁶。軸上の定点を O とし、点 P から軸への垂線を PN とすれば、点 P は N を中心とし、 PN を半径とする円運動をなす。点 P の速度 \mathbf{v} は従って、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (82)$$

となる。静止座標軸に対してベクトル \mathbf{A} が角速度 \mathbf{w} をもって回転するときには、その変化率は点 P

⁶角速度 \mathbf{w} は回転ベクトルとも呼ばれる。

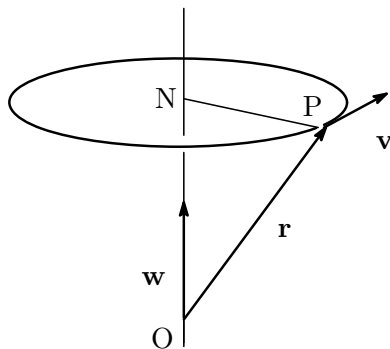


図 6: 剛体の回転

の速度であるから

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{A} \quad (83)$$

いま、静止している直交軸 Ox 、 Oy 、 Oz の原点 O の周りに書く速度 \mathbf{w} をもって回転している直交軸を Ox' 、 Oy' 、 Oz' とし、その基本ベクトルを \mathbf{i}' 、 \mathbf{j}' 、 \mathbf{k}' とする。と、式 (90) より

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{k}' \quad (84)$$

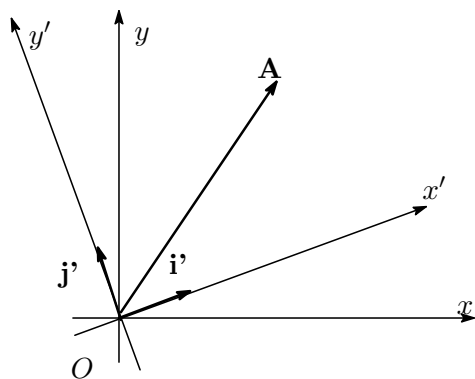


図 7: 回転座標軸

また、 $A_{x'} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{A}$ 、 $A_{y'} = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{A}$ 、 $A_{z'} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_{x'}}{dt} &= \mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + (\mathbf{w} \times \mathbf{i}') \cdot \mathbf{A} = \mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + (\mathbf{A} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{i}' \\ &= \mathbf{i}' \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{A} \right) \\ \frac{dA_{y'}}{dt} &= \mathbf{j}' \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{A} \right) \\ \frac{dA_{z'}}{dt} &= \mathbf{k}' \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{A} \right) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

が得られる。これから

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)' = \left(\frac{dA_{x'}}{dt}, \frac{dA_{y'}}{dt}, \frac{dA_{z'}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{A} \quad (86)$$

あるいは

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{A}'}{dt} + \mathbf{w} \times \mathbf{A} \quad (87)$$

ここで $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)'$ は回転座標軸に対する点の相対速度である。

相対速度

式 (86) において、 \mathbf{A} の代わりに運動する点の位置ベクトル \mathbf{r} をとれば

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (88)$$

回転座標軸に対する相対速度を \mathbf{v}' とすれば、式 (88) は、

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (89)$$

5.2 剛体の運動

剛体内の任意の点の速度 \mathbf{v} は式 (90) より

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad (90)$$

で与えられる。