[対話] ローラン展開と留数・主値積分について

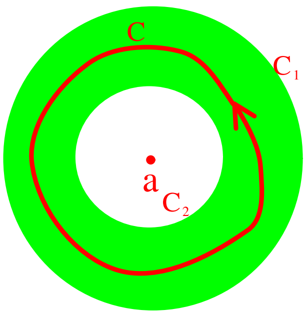
KENZOU

2006 年 3 月 4 日（Origin：06/2/5)

暦の上では春だが、奈良のお水取りがおわる 3 月の初旬までは安心できない。時折雪が舞うある日の午後、キャサリンがマフラーを首に巻き、厚手のコートを身にまとい、手には毛糸の手袋をはめてＫ氏を尋ねていった。。。

1 ローラン展開

- キャサリン：こんにちは〜Ｋさん。
- Ｋ氏：や〜、キャサリン、こんにちは〜。そとは寒そうだけどあいかわらず元気そうだね。
- キャサリン：おかげさまで元気だけは人一倍あるけど、最近少しわからないことがあって気分が晴れないのよ。Ｋさんにその辺のことを聞いて、もやもやした気分を晴らしたいと思ってきたの。
- Ｋ氏：なんだい、それは？
- キャサリン：うん、つい最近、複素関数論を勉強したのだけど、テイラー展開とその拡張版といったローラン展開というのがあるじゃない。テイラー展開は実関数のときによく使っていたから問題ないんだけれど、ローラン展開というのがいまいちよく分からないのよ。特異点がある場合はテイラー展開が使えず、その場合はローラン展開だ、というようなことがテキストに書かれているわね。特異点 a を中心とする 2 つの円 C_1，C_2 で囲まれた円環領域に任意の単純閉曲線 C があるとして、特異点周りのローラン展開は



$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n} \\
&= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots
\end{aligned} \tag{1}
$$

ただし　$b_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\quad c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}dz$

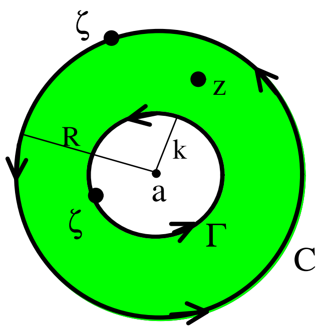
となる。ここで正のべきの係数 b_n はテイラー展開の係数と同じね。ローランの場合、負のべき係数 c_n が余分に加わるのよね。そこで、正負すべてについてまとめた係数を d_n で表すと

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad (n=0,\,\pm1,\,\pm2,\cdots) \tag{2}$$

となるのね。まぁ、ここまではテキストを何回も読みなおしてフォローできたわ。それじゃ一つ手習いということで**演習問題**に当たってみたのよ。係数の公式 (2) を使ってローラン展開の係数をだそうと頑張ったのだけれど、とても手に負えないの。ギブアップして解答を見ると、そんな計算どこにもしてないじゃない、使われているのはテイラー展開なのよ。。。それなら何もローラン展開なんか必要ないんじゃないの！というのが私の気分を曇らせている疑問なのよ。

- K氏：う〜ん、なるほど、そういうことか。確かに最初は (2) の公式を使うと思うよね。そしてそれにとりかかると途端に壁にぶつかる。とてつもなく計算が厄介なんだね。そこで直接的な計算は避けて、何とかうまく係数を求めたい、、、いろいろと工夫が必要になってくるんだね。
ところで先程のローラン展開の式（1）の導出はテキストで勉強したからいいだろう。

- キャサリン：OKよ。簡単に復習すればこういうことでしょう。（ホワイトボードになにやら書きはじめる）。点 $z=a$ を中心に半径 R の円 C をかき、この円 C と点 a を除く内部の点で $f(z)$ は正則とするわね。また、点 $z=a$ を中心に半径 k の円 $\Gamma\,(0<k<R)$ を描き、点 z は円 Γ の外部にあるようにすると、$f(z)$ は C と Γ で囲まれた円環領域で正則であるから、コーシーの積分公



式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{3}$$

となるわね。(3) の右辺第 1 項の積分で、ζ は円 C 上にあるから、$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$、だから $\dfrac{1}{\zeta - z}$ のところを次のようにべき級数の展開に持ち込むのね。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \tag{4}$$

同様にして右辺第 2 項の積分で、ζ は円 Γ 上にあり、点 z は Γ の外にあるから、$\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$、だから $\dfrac{1}{\zeta - z}$ のところを次のようにべき級数の展開に持ち込むのね。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z-a)-(\zeta-a)} = -\frac{1}{z-a}\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^{-1} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n \tag{5}$$

いままでの結果を整理すると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-n-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\zeta-a)^n f(\zeta)d\zeta \tag{6}$$

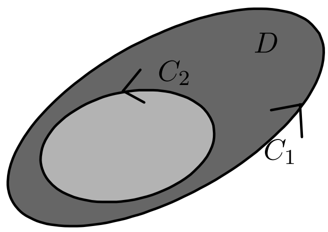
見やすくするために (5) の右辺第 2 項の積分で $N=-n-1$ とおいて書き直し、その後改めて N を n に書き直すと

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-n-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\zeta-a)^n f(\zeta)d\zeta &= \sum_{N=-\infty}^{-1}(z-a)^N\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{N+1}}d\zeta \\ &\equiv \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\end{aligned} \tag{7}$$

$f(z)$ は円 C と Γ で囲まれた円環内で正則だから、積分路 Γ を C にとりかえても値は変わらないわね。

領域 D で $f(z)$ は正則とする。
D 内に 2 つの閉曲線 C_1, C_2 があるとする。

$$\oint_{C_1}f(z)dz=\oint_{C_2}f(z)dz$$



ということで (6) を整理すると

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{8}$$

と小ざっぱりした式が得られるわけね。

1.1 ローラン展開の主要部

- K氏：うん、そうだね。さすがによく勉強しているね。ところで、(4)(5) のところでべき級数に展開しただろう。これはとりもなおさず**テイラー展開**していることだね。ここのところを頭に入れておくといいと思うよ。
  さて、ここでちょっと整理しておこうか。ローラン展開は (6) からわかるように、$|z-a|<R$ の円内で収束するべき級数と、$|z-a|>k$ の円外[1]で収束するべき級数の和で表されるということだね。つまり
  ① 正のべき級数は $|z-a|<R$ で一様収束する。
  ② 負のべき級数は $|z-a|>k$ で一様収束する。
  ③ ローラン展開は一意的である。

[1]ただし $k<R$ だから展開領域は環状領域となる。

とくに③は意味は大きいんだ。というのはローラン展開の係数を求めるとき、キャサリンもギブアップしたように (8) の計算は実際はほとんど使わない。それとはちがってもっと直接的な方法を使うんだよね。そしてそのような方法でローラン級数がみつかれば、一意性からそれが与えれれた円環内でもとの関数のローラン級数となる、ということが保障されるというわけなんだ。
ところで先程の小ざっぱりした (8) だけど、負のべき級数部と正のべき級数部に分けて書いておくと便利なんだ。つまり、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\varphi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{9}$$

と書くと $\varphi(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$ で、$\varphi(z)$ は点 $z=a$ を含んだ領域で正則となるね。また、よく知っていると思うけど、(9) の負のべきの級数部 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ を**ローラン展開の主要部**と呼んでいるんだね。ということで、一通りローラン展開の復習が終わったからキャサリンを悩ました演習問題にあたてみようか。どんな問題なんだい？

- キャサリン：うん、そのまえにＫさんのいう直接的な方法って具体的にどんなのがあるの？
- Ｋ氏：ウッフォン！　そうだね、与えられた関数をいくつかの関数の和差積商に変形してから、それぞれについてテイラー展開を利用するというのが一般的なやりかただと思うけど、それ以外は僕もあまり知らないから突っ込まないでね (笑い)。

1.2 ローラン展開の演習

- キャサリン：正則領域でのテイラー展開ということなのね。分かったわ。さて、演習問題だけど【問題 1】次の関数を $z=0$ を中心にしてローラン展開せよ。

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$$

無謀にもこれをもろに (8) の c_n に入れて計算しようとしたのよ。。。

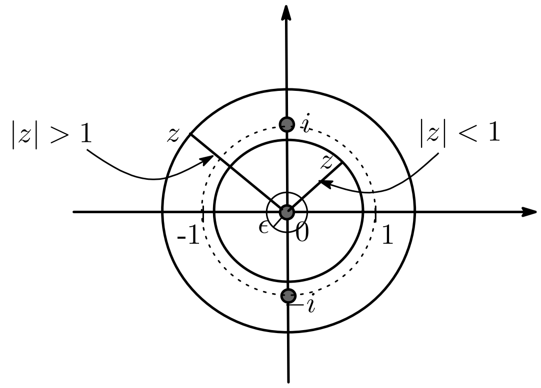
- Ｋ氏：ＯＫ！それではやってみよう。分母は $z=0$ と $z=\pm i$ で 0 になる、この関数の特異点だね。特異点 (原点)$z=0$ の回りのローラン展開は
① 半径が ϵ、r（$0<\epsilon<r<1$) なる 2 つの円にはさまれた円環領域が正則であるから $0<|z|<1$ は $z=0$ の周りに (テイラー) 展開できるね。
② 半径が $|z|=1$ の時、円周上に特異点 $\pm i$ が存在するから展開を行うことはできない。しかし、$|z|>1$ ならその円周の外側では $f(z)$ は正則だから $z=0$ の周りに (テイラー) 展開できる。この場合、特異点は円周内部にすべて含まれるから、ローラン級数は負のべき項だけ[2]となるはずだ。

ということで
① $0<|z|<1$ の場合、$|z^2|<1$ だから $\displaystyle\frac{1}{1+z^2}=1-(z^2)+(z^2)^2-(z^2)^3+\cdots$ を使って

$$与式=\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{z}-z\frac{1}{(1+z^2)}=\frac{1}{z}+z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^2)^n=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n+1}$$

② $|z|>1$ の場合、$|1/z^2|<1$ だから

[2]積分路 Γ に相当する。



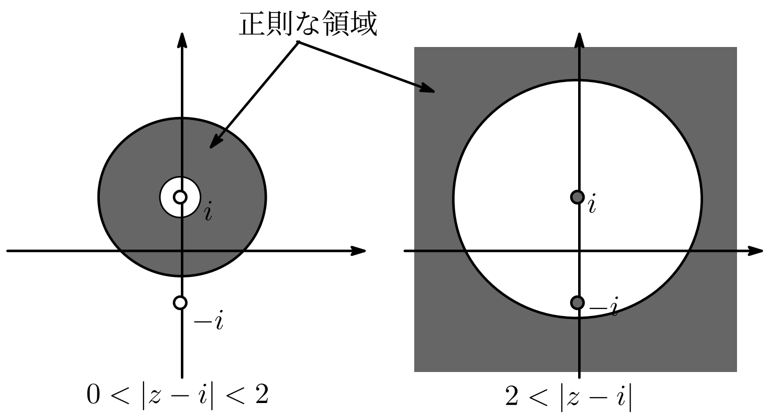
$$\text{与式}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z^2}=\frac{1}{z}-z\frac{1}{(1+z^2)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+1}}$$

となり、確かに負のべき項だけとなったね。
上の議論で $1/z$ はそのままにしておいただろう。この項は原点周りのローラン展開の負のべき項という形になっているね。だからこれ以上展開することはないんだね、念のため。

- キャサリン：なるほど、そういうことなのね。なんとなく分かってきたわ。なにか演習問題だしてくれる。

- K氏：それではこういうのはどうだい。
【問題 2】関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ を $z=i$ を中心にしてローラン展開せよ。

- キャサリン：やってみるわね。$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ となり、特異点は $\pm i$ ね。



因数分解した $f(z)$ 式に含まれる $1/(z-i)$ の項は、**点 i 周りのローラン展開の負のべき項に相当するからそのままそっとすることにして**と
① $0<|z-i|<2$ の場合。この場合は正のべきと負のべき項が混在するわね。$|(z-i)/2i|<1$ だ

から

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+2i}&=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i[1+(z-i)/2i]}\\
&=\frac{1}{2i(z-i)}\left[1-\frac{z-1}{2i}+\left\{\frac{(z-i)}{2i}\right\}^2-\left\{\frac{(z-i)}{2i}\right\}^3\cdots\right] \qquad (10)\\
&=\frac{1}{2i(z-i)}-\frac{1}{(2i)^2}+\frac{z-i}{(2i)^3}-\frac{(z-i)^2}{(2i)^4}\cdots
\end{aligned}
$$

② $|z-i|>2$ の場合。$|z-i|=2$ では円周上の特異点 $-i$ が載るから展開はできないっと。この場合は積分路が Γ に相当するから負のべき項ばかりとなるはずね。$|2i/(z-i)|<1$ だから

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+2i}&=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)\left\{1+\frac{2i}{(z-i)}\right\}}\\
&=\frac{1}{(z-i)^2}\left[1-\frac{2i}{(z-i)}+\left\{\frac{2i}{(z-i)}\right\}^2-\left\{\frac{2i}{(z-i)}\right\}^3\cdots\right] \qquad (11)\\
&=\frac{1}{(z-i)^2}-\frac{2i}{(z-i)^3}+\frac{(2i)^2}{(z-i)^4}-\frac{(2i)^3}{(z-i)^5}\cdots
\end{aligned}
$$

というのでどうかしら？

- K氏：お見事だよ。なかなか消化吸収が早いね (笑い)。先程の $f(z)$ を部分分数に展開すると

$$
f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-1}\right]
$$

となって、あとはキャサリンがやったのと同じ計算をやればよいのだが、最後に式を整理するときに通分して... とかいろいろ面倒だよね。だから**そっとするものはそっとする**のが一番だね、これが**コツ**なんだ (笑い)。ところで、ここで威力を発揮したのはテイラー展開だったね。知っていると便利なテーラ展開を載せておくよ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots && (|z|<1)\\
&(1+z)^{-m}=1-mz+\frac{(-m)(-m-1)}{2!}z^2+\cdots\\
&\qquad\qquad+\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}z^n+\cdots && (|z|<1)\\
&e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots && (\text{すべての } z) \qquad (12)\\
&Log(1+z)=1+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n+\cdots && (|z|<1)\\
&sinz=z-\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots && (\text{すべての } z)\\
&cosz=z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots && (\text{すべての } z)
\end{aligned}
$$

さて、それではもう少し演習問題をやろうか。

【問題 3】次の関数を $z=0$ を中心にしてローラン展開せよ。

(1) $ze^{1/z}$　　(2) $\dfrac{sinz}{z^2}$

- キャサリン：まず (1) の与式は $|z|>0$ で正則だから $e^{1/z}$ を上の公式を使ってテイラー展開すればいいのね。(2) は $sinz$ をテイラー展開すればいいということね。

- K氏：その通り、具体的な計算はここでしなくてもいいよ。ところで次の問題はどうだい。

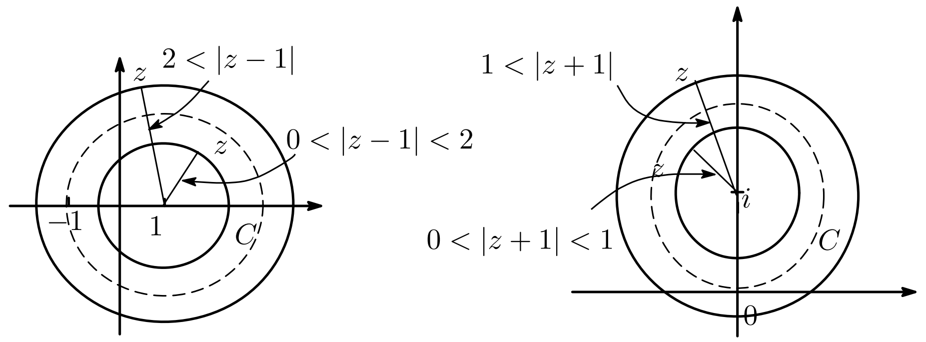
【問題 4】次の関数の（　）を内の特異点を中心とするローラン展開を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1-z^2}$ $\quad (z=1)$ 　　(2) $\dfrac{1}{z(z-i)}$ $\quad (z=i)$ 　　(3) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ $\quad (z=1)$

- キャサリン：まず (1) の問題をやるわね。

$$f(z)=-\frac{1}{(z-1)(z+1)} \tag{13}$$

特異点は 1 と -1 ね。



問題 4-1 　　　　問題 4-2

点円 z が円 C の内部にある場合、$|z-1|<2$ だから $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$ となるわね。点 1 の周りのローラン展開だから $1/(z-1)$ は例によって**そっとしておく**として

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \tag{14}$$

公式 (12) を使うと

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)}=1+\left(-\frac{z-1}{2}\right)+\left(-\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(z-1)^n \tag{15}$$

となって、これを (14) に代入すると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-1)^{n-1} \tag{16}$$

次に、点円 z が円 C の外部にある場合は、$|z-1|>2$ だから $\left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$ となるわね。$f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z)&=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1+2}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z-1}\right)} \\ &=-\left(\frac{1}{z-1}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} \end{aligned} \tag{17}$$

次に問題 (2) ね。特異点は 0 と 1 だから円 C の内部では $|z-i|<1$ で円 C の外部では $|z-i|>1$。円 C の内部にある場合は $1/(z-i)$ はそっとしておいて

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+i)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}} \\ &= -\frac{i}{z-i}+1+i(z-i)-\cdots+i^n(z-i)^n+\cdots = -\frac{i}{z-i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{18}$$

円 C の外部にある場合は $|(z+1)|>1$ だから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i+i} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = \frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z-i}\right)^n \end{aligned} \tag{19}$$

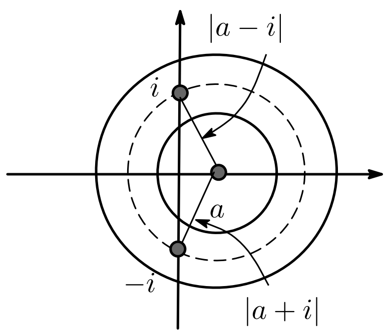
問題 (3) はと、特異点 $z=1$ の周りのローラン展開だから例によって $\dfrac{1}{(z-1)}$ はそっとしておき、点 $z=1$ での e^z のテイラー展開をしてやればばいいのだから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot e^z \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\left\{e+\frac{(z-1)e}{1!}+\frac{(z-1)^2e}{2!}+\cdots+\frac{(z-1)^ne}{n!}+\cdots\right\} \\ &= \frac{e}{(z-1)^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}\right] \end{aligned} \tag{20}$$

- K氏：OK！　大変おつかれさま〜。ところで今までは特異点周りのローラン展開ばかりやったけど、特異点でない点の周りのローラン展開をやってみようか。僕がやるからキャサリンは見ていればいいよ。

【問題 5】$\dfrac{2z}{z^2+1}$ を実数 a の周りでローラン展開せよ。

【解答】$\dfrac{2z}{z^2+1}=\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}$ で特異点は $\pm i$ の 2 つを持っているね。



そこで正則領域を C の内部の場合と外部の場合に分けよう。
① $|z-a|<|a\pm i|\cdots$ 円 C の内部の場合

この場合は正則領域でのローラン展開でテイラー展開と同じになる。負のべき項は含まない。
$\left|\frac{z-a}{a\pm i}\right| < 1$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z^2+1} &= \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{(a-i)+(z-a)} + \frac{1}{(a+i)+(z-a)} \\
&= \frac{1}{(a-i)(1+\frac{z-a}{a-i})} + \frac{1}{(a+i)(1+\frac{z-a}{a+i})} \\
&= \frac{1}{a-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a-i}\right)^n + \frac{1}{a+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a+i}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-a)^n\left[\frac{(a+i)^{n+1}+(a-i)^{n+1}}{[(a-i)\cdot(a+i)]^{n+1}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(a+i)^{n+1}+(a-i)^{n+1}}{(a^2+1)^{n+1}}(z-a)^n
\end{aligned}$$

② $|z-a| > |a\pm i| \cdots$ 円 C の外部の場合。この場合、特異点を内部に含むから積分路 Γ に相当する。だから負のべきのみの構成となるはずだね。
$\left|\frac{a\pm i}{z-a}\right| < 1$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z^2+1} &= \frac{1}{(z-a)(1+\frac{a-i}{z-a})} + \frac{1}{(z-a)(1+\frac{a+i}{z-a})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(a-i)^n+(a+i)^n}{(z-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

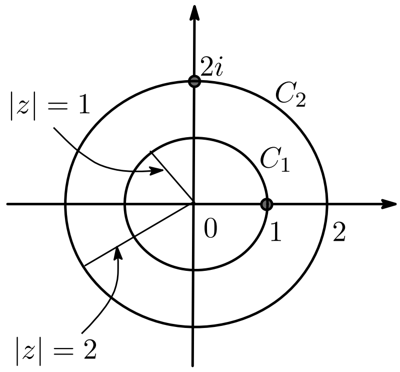
以上だが、これで心のもやもやは晴れたかな？

- キャサリン：ありがとう、Kさん。気分がすっきりしてきたわ。あとはもう少し自分なりに演習問題に当たって腕を磨くことにするわね。。。ところでローラン展開とくれば留数 (←とめすうではない、りゅうすうと呼ぶ）のことを避けて通れないわ。ついでだからこの辺の話もしていただけるとありがたいのだけど、、、

- K氏：ハックショーン！勉強家だね、キャサリンは。了解しました。少し鼻がグズグズしてきたが、ダメ押しにローラン展開の演習問題を一つだしておくから、ファイトがあればやってみといて。
【問題 6】$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}$ の $z=0$ の周りのローラン展開を求めよ。
【ヒント】特異点は 1 と $2i$ にあるね。

$$f(z) = \frac{1+2i}{5}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2i}\right)$$

① $0 < |z| < 1$ の場合、$-\dfrac{1}{z-2i} = \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2i}}$ ② $1 < |z| < 2$ の場合、$\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{z}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$
③ $2 < |z|$ の場合、$\dfrac{1}{z-2i} = -\dfrac{1}{z}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{2i}{z}}\right)$
【解答】



$0 < |z| < 1$(円 C_1 の内部)
$1 < |z| < 2$(円 C_1 と C_2 で囲まれた領域)
$2 < |z|$(円 C_2 の外側)

① $f(z) = \dfrac{1+2i}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i)^{k+1}} - 1\right) z^n$, ② $f(z) = \dfrac{1+2i}{5}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{infty}\frac{1}{(2i)^{k+1}} z^k\right)$

③ $f(z) = \dfrac{1+2i}{5}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(2i)^{n-1}}{z^n}$

- キャサリン：時間見つけてやってみるわ。
- K氏：さて、留数の話に行く前に Coffee Break しようか？
- キャサリン:さんせ〜い。実はここにくる前にケーキを買ってきたのよ。ご馳走するわ。

***** *Tea Time* *****

2 留数について

- K氏：ケーキおいしかったね。ご馳走さま。さて、留数の話にうつろうか。
- キャサリン：お願いするわ。
- K氏：OK！ $f(z)$ の特異点周りの周回積分を調べてみよう。まず、ダイレクトに計算してみるよ。$f(z)$ をローラン展開すると

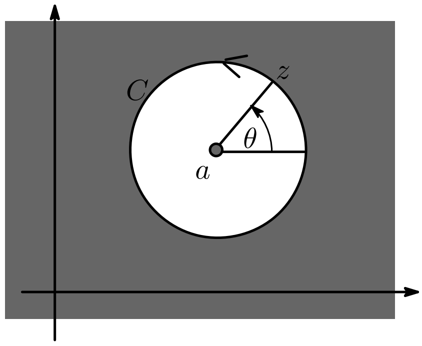
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{21}$$

と書けたね。この関数の特異点 a の周りの経路 C に沿った積分を考えてみよう。

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{-\infty}^{\infty} \oint_C c_n (z-a)^n dz \tag{22}$$

円周 C 上の点 z を極座標で表すと

$$\begin{gathered} z - a = re^{i\theta}, \quad (z-a)^n = r^n e^{in\theta}, \quad \frac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta} \\ \oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \end{gathered} \tag{23}$$



ここで $n=-1$ の場合を調べてみると

$$ic_n r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = ic_{-1}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i c_{-1} \tag{24}$$

次に $n+1\neq 0$ の場合は、

$$ic_n r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = ic_n r^{n+1}\left[\frac{1}{1(n+1)}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0 \tag{25}$$

つまり (23) の周回積分は $n=-1$ の項、すなわち $(z-a)^{-1}$ の積分が残るだけとなるね。

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1} \tag{26}$$

だから、関数 $f(z)$ がローラン展開されたとき、その特異点周りの積分は (26) と大変簡単な形になってしまう。そしてこの場合の係数 c_{-1} を特異点 a における $f(z)$ の留数と呼んでいるんだ。**留数**とは周回積分した場合に、消えずに**そこに溜まっている数**という意味だね。特異点 a における関数 $f(z)$ の留数は $Res[f,a]$ とか $Res[a]$ と書かれているよ。今までの話を整理すると、特異点 a を中心とする $f(z)$ のローラン展開を

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} \tag{27}$$

とする。ここで $\varphi(z)$ は点 a とその近くで正則な関数だね。すると次の公式が成り立つ。

$$Res[f,a] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = c_{-1} \tag{28}$$

留数のご利益は大変大きいんだ。というのは、関数がローラン展開できるとき、その級数の $n=-1$ の項さえ分かれば積分の値が求められるということだからね。
ところでくどいかもしれないが、コーシーの積分定理を使えば上の公式をスマートに証明することができるんだ。

$$\begin{aligned} &\text{コーシーの積分定理} \quad \oint_C f(z)dz = 0 \\ &\text{(派生公式)} \quad \int_C \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i, \quad \int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0 \quad (n>1) \end{aligned} \tag{29}$$

(9) で $f(z) = \varphi(z) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ と書いたよね。$\varphi(z)$ は正則関数だから上の公式より $\displaystyle\int_C \varphi(z)dz = 0$、$c_n$ は既に積分された単なる数となっているから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = 2\pi i$ という調子だね。

- キャサリン：面白いものねー、複素関数というのは。

2.1 特異点について

- K氏：さて、早速、留数の方法による積分計算に入っていきたいのだが、その前に蛇足ながら特異点について少し説明しておこう。
- キャサリン：お願いするわ。
- K氏：特異点（`Singilar Point`）というのは、複素関数 $f(z)$ が点 $z=a$ で正則でなく、その点を除く点 a のどのような近傍でも $f(z)$ が正則となる場合、点 a を $f(z)$ の特異点というんだ。特異点には、孤立特異点と孤立でない特異点があるんだが、複素積分の対象となるのは孤立特異点だけだから、いまは孤立でない方は放っておく (笑い)。そこで孤立特異点の定義なんだけど、

【孤立特異点の定義】

領域 D で一価正則な関数 $f(z)$ が点 $z=a$ で正則でないとき、$z=a$ を $f(z)$ の孤立特異点という。

孤立特異点には**「除きうる特異点」**と**極」**と**「真性孤立特異点」**の 3 つの仲間がいるんだ。

≪除きうる特異点≫

関数 $f(z)$ が 1 点 a を除いて一価正則かつ絶対値 $|f(z)|$ が有界である場合、点 a を除きうる特異点という。どうして除けるかというと、点 a での関数 $f(z)$ の値 $f(z)$ を

$$f(a) \equiv \lim_{z \to a} f(z) \tag{30}$$

で定義し直すんだ。そうすると点 $z=a$ を含む領域で $f(z)$ は一価正則になるだろう。つまり特異点 $z=a$ は除かれたことになるね。

- キャサリン：なにか例をだしてくれるかしら。
- K氏：そうだね。$f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$ という関数は $z=0$ の特異点をもつだろう。だけど

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1 \tag{31}$$

となるから、特異点 $z=0$ での関数 $f(z)$ の値をあらためて $f(0)=1$ と定義し直してやれば $f(z)$ は正則となるね。つまり特異点は除かれたことになる。ということで $z=0$ は除きうる特異点ということになるわけなんだ。

- キャサリン：なるほど。。。なにか開いた穴につぎはぎをあてる感じね。とするとつぎはぎがあてられない特異点もあるわけね。それが多分真性孤立特異点と呼ばれている、、、というのね。
- K氏：そっ、そうなんだ。そ、その話の前に**「極」**の話をしておかなければ、、、

≪極 (pole) ≫

関数 $f(z)$ が点 $z=a$ の近傍で一価正則とする。このとき、$z \to a$ の近づけ方によらず

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty \tag{32}$$

となる場合、$z=a$ を**「極」**と呼んでいるんだ。

そこでさっそく例だけど

$$\frac{1}{z-a},\ \frac{1}{(z^-a)^2},\ \frac{1}{(z-a)^3},\ \cdots$$

は $z=a$ でそれぞれ１位、２位、３位、… の極をもつと言っているんだ。最後に孤立真性特異点だね。

≪孤立真性特異点≫

$z=a$ で「除きうる特異点」でも「極」でもないとき、つまり $\lim_{z\to a} f(z)$ が存在しない（$z\to a$ の極限のとり方により ∞ を含めていろいろな値をとる）場合、$z=a$ を孤立真性特異点と呼んでいるんだね。例として次の関数がある。

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{1}{z}} \\ z = x(x>0)\ \text{とすると}\quad &\lim_{x\to+0} f(z) = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \\ z = -x(x<0)\ \text{とすると}\quad &\lim_{x\to-0} f(z) = \lim_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

ところでローラン展開

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

で、負のべきの項の係数 c_{-m} のうち 0 でないものが無限個あれば、特異点 a を関数 $f(z)$ の孤立真性特異点と呼んでいるね。先程の関数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ を特異点 $z=0$ の周りでローラン展開すると

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots \tag{34}$$

となって、負のべきが無限個あることになるね。だから $z=0$ は $f(z)$ の孤立真性特異点というわけなんだ。

2.2 留数計算

- キャサリン：そういうことなんだ。さて、いよいよ留数計算に入るのね。
- K氏：えらいファイトがあるね〜。僕は先程のケーキの糖分でエネルギーが続いているような状態なんだけど、、、まっ、それはともかくとして続けましょう。ズバリ留数の求めかたの公式を書くよ。
- キャサリン：突然大きな声でびっくりしたけど、あまり気負わないでね。
- K氏：いや失礼、自分に気合を入れたんだ (笑い)。さて公式だが、今日のハイライトの一つでもあるから枠に入れて書くと

留数の求め方

● $f(Z)$ の特異点 a におけるローラン展開の負の 1 次の係数を留数と呼び

$$Res[f, a] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \tag{35}$$

● a が $f(z)$ の除き得る特異点であれば

$$Res[f, a] = 0 \tag{36}$$

●点 a が関数 $f(z)$ の 1 位の極であれば

$$Res[f, a] = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \tag{37}$$

●点 a が $f(z)$ の k 位の極であれば $(k > 1)$

$$Res[f, a] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k f(z)] \tag{38}$$

となるんだ。この証明は省略するよ。それでは次の関数の留数を求めてみよう。

【例題 1】次の関数 $f(z)$ の (　) 内の極における留数を求めよ。

$$(1) f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} \quad (z=2), \quad (2)\ f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} \quad (z=0), \quad (3)\ f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} \quad (z=0)$$

【解答】

(1) $z = 2$ は $f(z)$ の 1 位の極だから $Res[f, 2] = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\dfrac{e^z}{z-1} = e^2$

(2) $z = 0$ は $f(z)$ の 2 位の極だから $Res[f, 0] = \lim_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0}\dfrac{-1}{(z+1)^2} = -1$

(3) この問題は $(z-a)$ というように極が顕にでていないから (37) や (38) の方式は使えない。(35) にまで遡らないとだめ。特異点 $z = 0$ の周りにローラン展開すると

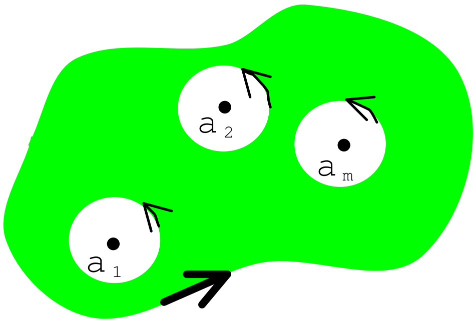
$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z}} &= z^2\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)!z^{n+2}} + \cdots\right] \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n} + \cdots \end{aligned}$$

これは負のべきが無限に続くから $z = 0$ は孤立真性特異点となるね。留数はローラン展開の z^{-1} の係数だから $Res[f, 0] = 1/6$ 。

いままで積分経路の内部に関数 $f(z)$ の孤立特異点がただ一つ含んでいるような周回積分を考えてきたが、周の内部に複数個の孤立特異点を含んだ場合はどうなるか、これが留数定理なんだね。この場合は

留数定理

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f,\ a_k] = Res[f,\ a_1] + Res[f,\ a_2] + \cdots + Res[f,\ a_n] \tag{39}$$



となるんだ。証明はここではやらないから適当なテキストを参照してね。ここで注意すべきは、いまさら言うまでもないと思うが、周回積分が時計と逆回りとなっていることだね。時計回りにとると負号がつくことになるよね。早速演習問題だけど

【例題 2】次の積分を求めよ。

$$(1)\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz \qquad C:|z|=3, \quad (2)\int_C \frac{zsinz}{(z-1)^2}dz \qquad C:|z-i|=1$$

【解答】
(1) 円 C の内部に 1 位の極 $z=-2,1$ があるから

$$Res[f,-2]=\lim_{z\to -2}(z+2)f(z)=\frac{2}{3}, \quad Res[f,1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\frac{1}{3}$$

留数定理を使って $\displaystyle \int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz = 2\pi i(Res[f,-2]+Res[f,1]) = 2\pi i$

(2) 円 C の内部に 2 位の極点 $z=i$ があるから

$$Res[f,i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\{(z-i)^2f(z)\}=\lim_{z\to i}(sinz+zcosz)=i\,e$$

留数定理を使って $\displaystyle \int_C \frac{zsinz}{(z-1)^2}dz = 2\pi iRes[f,i] = -2\pi e$

2.3 実定積分の計算

- キャサリン：なるほどねぇ〜。よく分かってきたわ。ところで留数定理を利用すれば実定積分が容易になるというような話を以前どこかで聞いたことがあるわ！ Kさん、だいぶんお疲れみたいだけど、頑張ってその辺の話までしてくれる。
- K氏：(ふぅ〜っとため息つきながら）はいはい、わかりました。ここまで来たら引くわけにはいかないからね。それでは (39) の留数定理を利用して実変数 x の関数 $f(x)$ の定積分、無限積分の計算法をやりますか。
- キャサリン：なにかやけっぱちになってきたような感じネ？
- K氏：いやいや、そんなことはないよ、ちょっと頭がふらついてきただけさ。

2.3.1　三角関数を含んだ有理関数（分数関数）の積分

- K氏：それではまず有理関数 $f(X,\,Y)$ の $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(cos\theta,\,sin\theta)\,d\theta$ という積分を取り上げよう。有理関数とは分数関数のことだよ、知っていると思うけど。$cos\theta$, $sin\theta$ を z で表すと次のようになるね。

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ sin\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

だからいま考えてる積分計算は次のようになるね。

公式-1：$sin\theta$ と $cos\theta$ の有理関数の積分

$$\int_0^{2\pi} f(cos\theta, sin\theta)d\theta = \frac{1}{i}\oint_C f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}dz, \quad \text{ただし } z=e^{i\theta} \tag{41}$$

三角関数の入った定積分は $tan(\theta/2)=t$ とおいてやるのが定石だよね。しかし留数定理を使うとややこしい計算プロセスを経ることなしに簡単に積分の値が求まるんだ。そこで次の例題をやってその威力を体感してごらん。

【例題３】

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3sin\theta}$$

- キャサリン：そうね、聞いてるばかりじゃ面白くないからやってみるわ。

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3sin\theta} \tag{42}$$

$$z = e^{i\theta} \tag{43}$$

とおくと、積分 (42) の積分変数 $theta$ が 0 から 2π まで動くとき、(42) の複素数 z は単位円次の C の上を一周するわけね。(42) を θ で微分すると

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} \quad \text{これから} \quad d\theta = \frac{1}{iz}dz \tag{44}$$

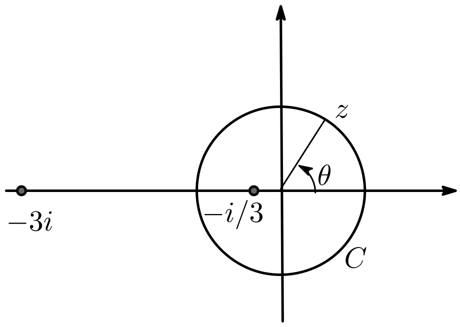
$$sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \tag{45}$$

求める積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3sin\theta} = \frac{1}{i}\oint_C \frac{1}{5+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{z}dz \\ &= \oint_C \frac{2}{3z^2+i10z-3}dz = \oint_C \frac{2}{3(z+i/3)(z+3i)} \end{aligned} \tag{46}$$

(46) の被積分関数は $z=-i/3$ と $z=-3i$ に一位の極をもつけど、このうち円 C の内部にあるものは $z=-i/3$ だけだから留数の公式より

$$Res[f(z), -i/3] = \lim_{z\to -i/3}\left\{(z+\frac{i}{3})\frac{2}{3(z+i/3)(z+3i)}\right\} = \frac{1}{4i} \quad \text{ただし } f(z) = \frac{2}{3z^2+i10z-3} \tag{47}$$



留数の定理を使って

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3cos\theta} = \int_C \frac{2}{3z^2+i10z-3}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \tag{48}$$

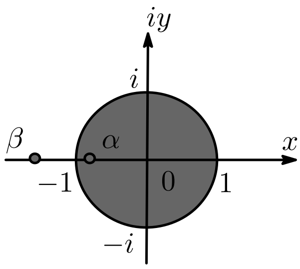
となるわけね。

- K氏：そのとおり！
- キャサリン：本当にKさんの言うとおりね！いとも簡単に積分できたわ〜。
- K氏：それじゃ次に少し一般的な奴をやろうか。

【例題 4】$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+bcos\theta} \quad (a > b > 0$ とする$)$

【解答】(40) を使って与式を書き直すと

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+bcos\theta} = \frac{1}{i}\oint_C \frac{1}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{bz^2+2az+b}$$



$bz^2+2az+b=0$ の根を α, β とすると

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \beta = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

積分 I は

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+bcos\theta} = \frac{2}{ib}\oint \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

特異点は $z=\alpha,\, z=\beta$ で、どちらも 1 位の極だね。$a>b>0$ と $\alpha,\,\beta$ の $\alpha=-\frac{a}{b}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$ から $-1<\alpha<0$、同様にして $\beta<-1$ となるから積分経路である単位円の中の特異点は $z=\alpha$ だけとなるね。ここで $z=\alpha$ での留数を求めると

$$Res[f,\alpha]=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{2}{ib}(z-\alpha)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right]=\frac{2}{ib}\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}$$

となるから、留数定理により求める積分は

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+bcos\theta}=2\pi i\frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

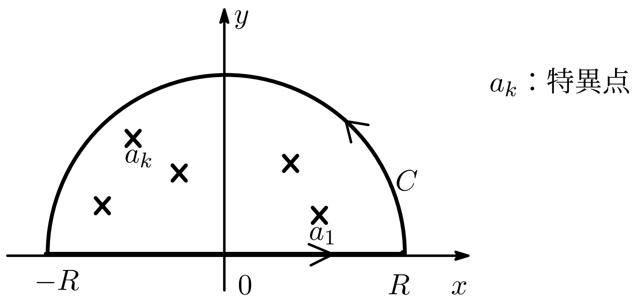
となるわけだね。

2.3.2 実軸上に極をもたない有理関数の積分

- K氏：ここでは $f(x)$ を実軸上に特異点を持たない x の有理関数として、$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ という型の積分を考えようというわけなんだ。そして有理関数 $f(x)$ を複素数 z の関数 $f(z)$ と見たときに

$$z\longrightarrow\infty \text{ のとき } f(z) \text{ は } 1/z \text{ より速く } 0 \text{ に近づく}$$

という条件を満たすものとするよ。もっともこの条件は積分 I が発散しないための条件でもあるから、特に気にする必要もないよ。まぁ、こういう条件を付加することで実定積分は次の線積分に置き換えることが可能となるんだね。



$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}Res[f,a_k] \tag{49}$$

さっそく、例題をやってみようか。

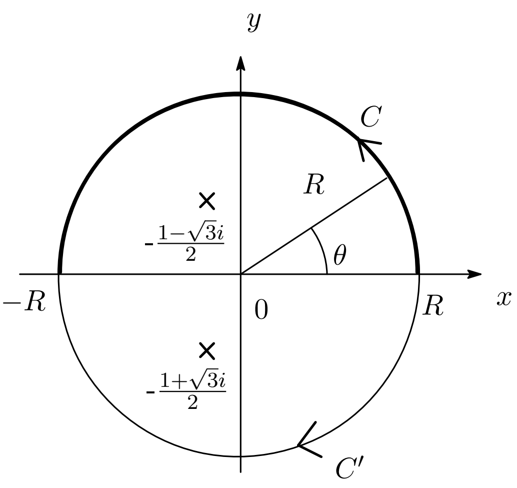
- キャサリン：ちょっと待って。とにかく留数定理が使える形に持ち込むために、閉曲線 C に沿った積分路を考えるのよね、そこまではいいとして、どうして上の半円だけなの？　下に半円を書いてもいいのじゃないかしら。

- K氏：ＯＫ！その疑問はおいおい解明していくとして[3]、まず手始めの練習として次の積分[4]を計算してみよう。

[3]例題 4 参照。
[4]この例のように積分区間が有界でない積分を広義積分と呼んでいる。詳しいことは後ほど。。。

【練習】$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$ を求めよ。

【解答】$\oint_C \frac{1}{z^2+z+1}dz=\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+x+a}dx+\int_{半円}\frac{1}{z^2+z+1}dz$



半円は上半円をとる。$R\to\infty$ で右辺第 1 項は求める積分となり、第 2 項は $z=Re^{i\theta}$ とおいて $R\to\infty$ の極限で 0 となる。だから

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C \frac{1}{z^2+z+1}dz=\oint \frac{dz}{(z+\frac{1-\sqrt{3}i}{2})(z+\frac{1+\sqrt{3}i}{2})}\\
&= 2\pi i Res[f,-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}]=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

となるね。ところで積分路を下半円の C' にとると逆回りで留数に負の符号がついて $-Res[f,-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}]=-\frac{1}{\sqrt{3}i}$、また周回積分も負の符号が付くから、結局 $I=-2\pi i\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ と同じ値となる。

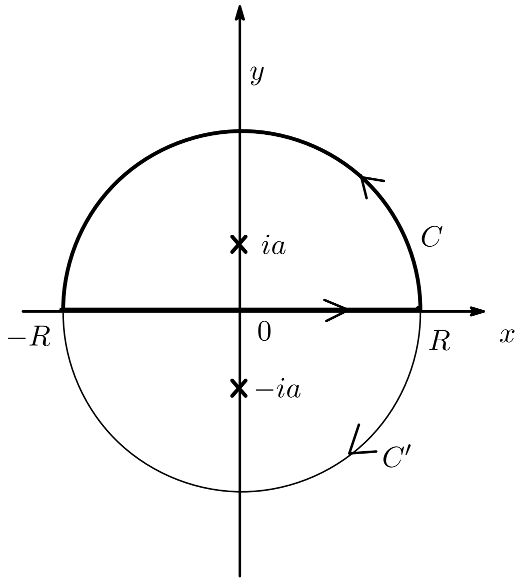
さて、次の例題をやってみよう。

【例題 4】$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a}\quad(a>0)$ を求めよ。

【解答】
複素平面上に半径 R の閉じた上半円を描き、下図の様な積分路 C を考える。閉じた積分路 C は実軸上の $-R$ から R の直線部分と半径 R の半円とからなるので、C を一周する積分は

$$
\oint_C f(z)dz=\oint_C\frac{dz}{z^2+a^2}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+a^2}+\int_{半円}\frac{dz}{z^2+a^2} \tag{50}
$$

と書けるね。求める積分 I は、(50) の左辺と右辺をそれぞれ計算すれば求められる。$f(z)$ は $\pm ia$



に一位の極をもち、積分路 C の内側にある極は ia だから

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_C \frac{dz}{(z-ia)(z+ia)} \\ &= 2\pi i Res[f, ia] = 2\pi i \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{1}{(z+ia)(z-ia)} \\ &= \frac{\pi}{a}\end{aligned} \tag{51}$$

また、(50) の右辺第 1 項は $R\to\infty$ の極限で求める積分 I に等しいわね。次に右辺第 2 項は、半円上で $z = Re^{i\theta}$ であるから

$$\int_{半円} \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2}d\theta = \int_0^\pi g(R,\theta)d\theta \tag{52}$$

$g(R,\theta)$ の $R\to\infty$ の極限値は、ロピタルの定理を使って

$$\lim_{R\to\infty} g(R,\theta) = \lim_{R\to\infty}\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+a^2} = \lim_{R\to\infty}\frac{ie^{i\theta}}{2Re^{2i\theta}} = \lim_{R\to\infty}\frac{ie^{-i\theta}}{2R} = 0 \tag{53}$$

以上のことから $I = \dfrac{\pi}{a}$ となるわけね。

- K氏：ご明解！　ところで先程の積分路の話だけど、下平面の C' をとると周回は逆回りとなるから留数定理のところで少し触れたように負号が付くことになる。また、C' の内部の極は $-ia$ だから

$$I = -2\pi i Res[f, -ia] = -2\pi i\frac{1}{-2ia} = \frac{\pi}{a} \tag{54}$$

ということで、今の場合どちらの半円をとっても結果は変わらないということになる。

【例題 5】$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}$　($a>0$, k は実数) を求めよ。

【解答】例題 4 の図の積分路 C を取る[5]。このとき、例題 4 と同じように

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx + \int_{半円}\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz \tag{55}$$

[5] この積分の場合は k の負号によって積分路 C、C' いずれに取るかが決まる。

ここで右辺の第 2 項が $R \to \infty$ の極限で 0 と消えてくれれば問題ないが。以下にこれを調べてみよう。$z = Re^{i\theta}$ と置いて

$$\int_{\text{半円}} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{x^2 + a^2} Rie^{i\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{ikRcos\theta} e^{-kRsin\theta}}{x^2 + a^2} Rie^{i\theta} d\theta \tag{56}$$

ここで (56) の積分 $\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{ikRcos\theta} e^{-kRsin\theta}}{x^2 + a^2} Rie^{i\theta} d\theta \right|$ が果たして収束してくれるのかということが問題になる。$e^{ikRcos\theta}$ は $|e^{ikRcos\theta}| = 1$ であるから問題にする必要がない。問題は $e^{-kRsin\theta}$ の振る舞いだ。今、上半面を考えているから $0 < \theta < \pi$ で $sin\theta$ は正の値となる。

● $k > 0$ のケース

従って、もし、$k > 0$ なら $R \to \infty$ の極限で $e^{-kRsin\theta} \to 0$ となって、(55) の右辺第 2 項の積分は目出度く消えてくれる。求める積分値は

$$I = 2\pi i Res[f, ia] = 2\pi i \frac{e^{-ka}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \quad (k > 0) \tag{57}$$

● $k < 0$ のケース

この場合は積分路を上半円に取ると積分が収束しない (0 とならない)。しかし、下の半円 C' 上を時計回りにとると、$-\pi \le \theta \le 0$ だから $sin\theta < 0$ となり、うまい具合に $R \to \infty$ で積分は 0 となる。したがって、留数の定理より

$$I = -2\pi i Res[f, -ia] = -2\pi i \frac{e^{ka}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{ka} \quad (k < 0) \tag{58}$$

これら 2 つの結果をまとめて書くと $I = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a}$ となる。

ところで、ここでジョルダンの予備定理と呼ばれるものを載せておくよ。これを知っていると計算が楽になるんだ。

ジョルダンの予備定理

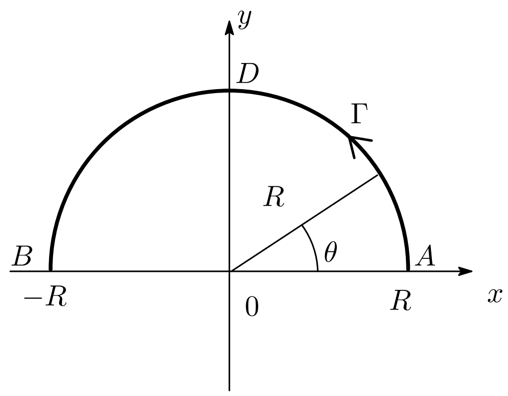
下の図の半円 Γ 内で定義された関数 $f(z)$ に対して

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$$

であれば、Γ 上での積分は $R \to \infty$ で

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z) e^{ikx} dz = 0 \quad (k > 0) \tag{59}$$

- キャサリン：いろいろと考えられているのね、まったく感心するわね〜。ところで、その補助定理を使うと $|z| \to \infty$ で $1/(z^2 + a^2) \to 0$ だから $\int_{\text{半円}} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz = 0$ となるわけね。
- K 氏：そうなんだ。上のジョルダンの補助定理のおまけとして上半平面上の $f(z)$ の極は沢山ある場合どうなるかを載せておくよ。



$f(z)$ はジョルダンの補助定理を満たす関数とし、a_k を上半平面上にある $f(z)$ の極とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[e^{imx}f(z), a_k] \tag{60}$$

3 コーシーの主値

- K氏：もうそろそろ夕方になってきたね。さっき雪がちらついていたけどやんだみたいだ。キャサリンにつられてここまできたけど、ついでだからコーシーの主値の話をして今日のお話は切り上げることにしようか。

- キャサリン：そうね、夕焼けがきれいね。Kさんには本当に感謝するわ。ところでコーシーの主値というのはよく物理で聞くわね。是非お願いするわ。

- K氏：よっしゃ！ほな、がんばろか。これで今日はおしまいと思ったら元気がでてきた (笑い)。被積分関数 $f(x)$ が積分区間内の点 a で無限大となるようなばあい、つまり $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \infty$ の場合だね、定積分 $\int_A^B f(x)dx$ を考えようというわけなんだ。被積分関数が無限大になる場合には極限操作により積分を定義するんだが、これがいわゆる広義積分[6]というものなんだね。ということで、この積分は

$$\int_A^B f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to 0}\int_A^{a-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{a+\epsilon_2}^{B} f(x)dx \tag{61}$$

と定義する。ここで ϵ_1, ϵ_2 を独立に 0 に近づけるとき、この極限が存在するとき、広義積分は収束するといっている。一方、右辺の 2 つの極限がともに存在しないけれど、$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ という条件をつけて極限をとることにすれば

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_A^{a-\epsilon} f(x)dx + \int_{a+\epsilon}^{B} f(x)dx\right] \tag{62}$$

[6] 有限区間で連続な関数の積分を定積分と呼んでいるが、有限区間でも不連続点を含んでいたり、区間が無限となっているような積分を広義積分と呼んでいる。

が存在することがある。この極限値をコーシーの主値と呼んで、

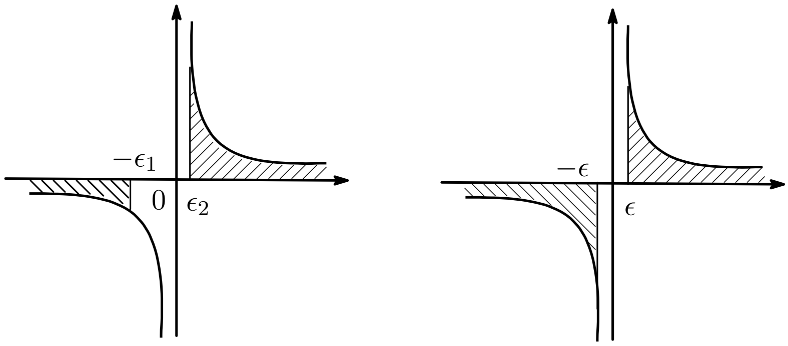
$$I = \left[\int_A^{a-\epsilon} f(x)dx + \int_{a+\epsilon}^B f(x)dx\right] = P\int_A^B f(x)dx \tag{63}$$

と書いているよ。P の代りに vp(value of principle) と書いているテキストもあるね。この辺の事情を具体的な例で調べてみようか。

- キャサリン：そうね。その方がイメージははっきりするわね。
- K氏：次の積分を考えてみよう。

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx \tag{64}$$

この積分は $x = 0$ で被積分関数が無限大になる。そこで 0 をはさんだ微小区間 $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ を除いて



積分を計算し、その後で $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ の 2 重極限をとる。

$$I = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\left[\int_{-1}^{-\epsilon_1}\frac{1}{x}dx + \int_{\epsilon_2}^1\frac{1}{x}dx\right] \tag{65}$$

$-x = t$ とおくと

$$\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}dx = \int_1^\epsilon \frac{1}{-t}(-dt) = \int_\epsilon^1\frac{1}{t}dt$$

と書けることに注意すると

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\left[\int_{-1}^{-\epsilon_1}\frac{1}{x}dx + \int_{\epsilon_2}^1\frac{1}{x}dx\right] = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\left[\int_1^{\epsilon_1}\frac{1}{x}dx + \int_{\epsilon_2}^1\frac{1}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon_1\to 0}\Big[\log|x|\Big]_1^{\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to 0}\Big[\log|x|\Big]_{\epsilon_2}^1 = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}[\log\epsilon_1 - \log\epsilon_2] \\ &= \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\log\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{aligned} \tag{66}$$

となるが、(66) の極限値は確定しないんだ。というのは、仮に $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$ とすると $\log(\epsilon_2/\epsilon_2) = \log 2$ となり、$k > 0$ として $k\epsilon_2 = \epsilon_1$ とすれば、$\log\epsilon_1/\epsilon_2 = \log k \equiv K$ となって、つまるところ極限操作の如何によって積分の値は任意の値 K となってしまう。しかし、(66) で、もしも $\epsilon_1 = \epsilon_2$ という条件をつけて極限を取れば、(66) の極限値は確定値 0 をもつことになるだろう。これを積分 I のコーシーの主値と呼んでいるんだ。ところで「主値」という名前の由来だけど、いま見てきたように積分の定義の仕方によりいろいろな値を取り得るけど、主値だけは確定値をとったよね、、、名前の由来はこの辺にあると思うんだ。

- キャサリン：なるほど、素晴らしい説明で、大変わかりやすいわ。
- K氏：OK！　気をよくしたからおまけにもう一つ例をだそう（←すぐ調子にのる）。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx \tag{67}$$

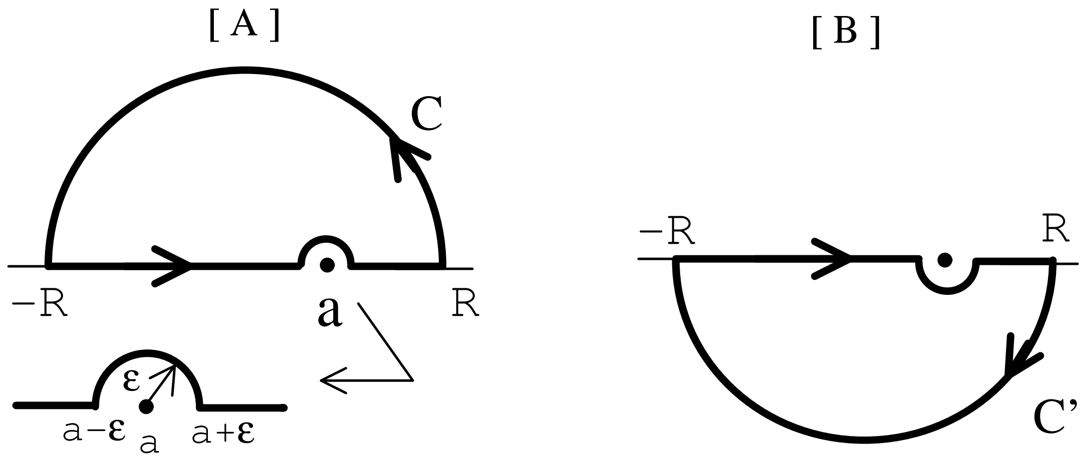
という広義積分を考えよう。これは既に留数計算のところでお目にかかっているね。これは広義積分の定義[7]

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}f(x)dx+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}f(x)dx$$

に従って

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}\frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{R\to\infty}(-Arctan(-R))+\lim_{R\to\infty}Arctan(R)\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned} \tag{68}$$

さて、本題に戻ってと。。。



一般に主値積分は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{a+\epsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx\right] \quad (a\text{ は実数}) \tag{69}$$

という形に表される。主値を表す記号として P を使うと

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{a+\epsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx\right]=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx \tag{70}$$

---

[7] 広義積分は大変デリケートで、面倒だからといって $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$ と定義しないこと。例えば次の広義積分は収束しないが、上のやり方をすると $\int_{-\infty}^{\infty}xdx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}xdx=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R}=\lim_{R\to\infty}0=0$ となってしまうので注意しよう。あくまで繊細に攻めるように。。。

この主値積分を留数定理を使って計算してみようというわけなんだ。

$$I = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx \tag{71}$$

積分路は実軸上の点 a の極を迂回すべく半径 ϵ の半円を描き、上半面に半径 R の半円を描いて積分路を閉じさせる。閉曲線 C に沿った積分は留数定理により

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\sum\left(\frac{f(z)}{z-a}\text{の上半面での留数}\right) \tag{72}$$

となるね。この式の左辺の積分は、積分路を辿ると

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz &= I_{\text{直線}} + I_{\text{小半円}} + I_{\text{大半円}}\\ &= \int_{-R}^{a-\epsilon}\frac{f(x)}{x-a}dx + \int_{a+\epsilon}^{R}\frac{f(x)}{x-a}dx + I_{\text{小半円}} + I_{\text{大半円}}\end{aligned} \tag{73}$$

となって、直線部分の積分は $R\to\infty,\epsilon\to 0$ の極限で求める主値積分 (69) に等しい。次に $I_{\text{小半円}}$ は例によって

$$z = a + \epsilon\, e^{i\theta} \tag{74}$$

とおいて、偏角 θ が π から 0 まで減少することに注意すると

$$I_{\text{小円}} = \int_{\pi}^{0}\frac{f(a+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\, i\,\epsilon e^{i\theta}d\theta = i\int_{\pi}^{0} f(a+\epsilon e^{i\theta})d\theta \tag{75}$$

となるよね。ここで $\epsilon\to 0$ の極限をとると

$$I_{\text{小円}} = -\pi i f(a) \tag{76}$$

次に $I_{\text{大半円}}$ の計算だけど、半径 R を無限大にした極限でこの積分が 0 となると仮定するんだ (汗;)。

- キャサリン：ちょっと待って！　なにそれ、余りにもご都合主義じゃない。
- K氏：(シドロモドロしながら）たっ、たしかに一般論ではそのように感じるかもしれないけど、実際には具体的な関数でキチンと確認しなければならないんだ。
- 　キャサリン：そういうことね、分かったわ。
- K氏：ということで、積分路が上半円 C の場合、求める主値積分 (69) は

$$I = \pi i f(a) + 2\pi i\sum\left(\frac{f(z)}{z-a}\text{の上半円での留数}\right) \tag{77}$$

で与えられることになるね。積分路が下半円 C' の場合は、全く同様に計算すればいいんだが、小半円での θ が π から 2π まで増加することと、大半円の積分路は時計回りとなるということに注意すると

$$I = -\pi i f(a) - 2\pi i\sum\left(\frac{f(z)}{z-a}\text{の上半円での留数}\right) \tag{78}$$

となるよね。

- キャサリン：なるほどねぇ〜、うまく計算されるものね、感心するわ。ポイントは大半円での積分がうまい具合に 0 になってくれることね。

- K氏：そうだね。初めて習ったときはなにか肩透かしを食らったような、、、さぁ積分するぞ〜、と、張りつめていた気合が急にふにゃふにゃになるような、、、
さて、最後の例題を解いて本日の講義は終了することにしますか。

- キャサリン：Kさん、今日は本当にありがとう、少しお疲れが顔にでているようだけど頑張ってね。

- K氏：あいよ！　いよいよ終われると思うと気が楽になってきた (笑い)。$k > 0$ として主値積分

$$I = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x-a} dx \tag{79}$$

を求めてみよう。$k > 0$ だから、【例題 5】で見たように上半面に積分路を取るよ。そうすると今やったように

$$I = \pi i f(a) + 2\pi i \sum \left(\frac{f(z)}{z-a} \text{の上半円での留数} \right) \tag{80}$$

大半円での積分は 0 となるよね。図［A］の積分路 C の内部にはこの被積分関数の特異点はないのでコーシーの積分定理より (80) 右辺第 2 項は 0 となる。だから、求める答えは

$$I = \pi i e^{ika} \tag{81}$$

となるね。最後のおまけとして公式を書いておくよ。これからの参考にして。

コーシーの主値積分

正則関数 $f(z)$ の実軸上での積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \quad (a: \text{実数}) \tag{82}$$

いついて、この積分の主値 (`principal value`) を

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \right] \tag{83}$$

と定義する。主値は正則関数を考えている限り

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} = i\pi f(a) \tag{84}$$

また

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a \pm i\epsilon} dx = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \mp \imath\pi f(a) \tag{85}$$

- キャサリン：本当にありがとう。今日は大変勉強させてもらったわ。気分もおかげさまですっきりしたわ〜。あっもう 7 時半を回ったわね。今日は、お礼に K さんに夕食を奢ろうと思っていたのだけど、生憎 8 時に友達と待ち合わせているのよ。残念だけど夕食は次の機会にさせてね。

- K氏：ハイハイ分かりました。遅れるとまずいからまた今度を楽しみにしておくよ。

- キャサリン：ごめんね〜、今日写したノートは何度も読み返して勉強するわ。本当にありがとう、それじゃね〜。

(終わり)