対話・グリーン関数 (1)

$KENZOU$

2006 年 3 月 25 日/ $origin$: 3/12

梅も満開を過ぎ、早いところでは桜が咲き始めた今日この頃、宇治川の川べりを自転車を軽快に走らせてエミリーがK氏を訪ねてきた。

1 問題提起

- エミリー：こんにちはKさん、宇治川の桜祭りももうすぐね。
- K氏：や～、こんにちはエミリー。そうだね、桜祭りが楽しみだね。ところで今日はたしかデートの日と言っていなかったかい？　ここで油を売っててもいいのかなぁ～。
- エミリー：お言葉ね！そう、今日は確かにデートの日だったんだけど、あいにく彼に急用ができてしまったのよ。そこで仕方なく取りやめにしたの。
- K氏：それは残念だね。ところで今日はまさか暇つぶしにここに来たのじゃないだろうね。こう見えてもいろいろ雑用があって何かと忙しいんだよ。
- エミリー：もちろんお忙しそうなKさんの邪魔をするつもりはないわ。ただ、一人でボンヤリ宇治川の畔のベンチに座って周りの緑を眺めていたとき、ふっと以前からもやもやしていたグリーン関数のことを思い出したのよ。グリーンの定理というのはジョージ・グリーン[1]電磁気学で習ったことがあるけど、グリーン関数と一体どういう関係にあるのかとか、例えばポアソンの方程式 $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})$ を解く場合、$\Delta G(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r})$ としてグリーン関数 $G(\boldsymbol{r})$ を導入するじゃない。この場合、いつも右辺はデルタ関数に置き換えるのよね。確かにこうすることは間違いでないことは計算すれば分かるのだけど、なぜいつもデルタ関数を置くのか、、、グリーン関数は別名伝播関数とも言われているけど、何故そのような名前が付けられるのか物理的イメージがいまいち湧いてこないのよ。

2 グリーン関数の意味するところ

- K氏：そうなんだ。それじゃ復習を兼ねてポアソンの方程式を見てみようか。ポアソンの方程式は**電荷分布** $\rho(\boldsymbol{r})$ 、静電ポテンシャルあるいは電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を求める式だよね。ここで、電荷分布を特に強調したことを覚えといてね。方程式は (真空) 誘電率 $\epsilon_0 \equiv 1$ として

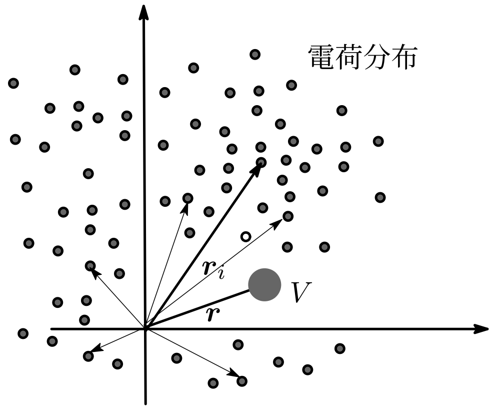
$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

[1] $GeogeGreen(1973-1841)$ 英国の数学者。家業の粉屋の仕事を続けながら独学で勉強し、35 才の時に、歴史に残るグリーンの定理やグリーン関数の論文を書き上げる。この革新的な論文はすぐには認められず、生前では英国においてさえ殆ど知られていなかった。現在ではその名誉を讃え、ウエストミンスター寺院にニュートンの近くに葬られているという。岡本久著「知られざるグリーン」より

と書かれることは良くご存知の通りだ。さて、ここで電荷分布の代りに一つの点電荷を考えてみよう。点電荷は1点だけでゼロでない δ 関数で与えられるね。点電荷のつくる静電ポテンシャルを $G(\boldsymbol{r})$ とすると、ポアソンの方程式は

$$\Delta G(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

となる。ところで、電荷が空間に分布している場合の静電ポテンシャルは、各点における電荷の作るポテンシャルの和として表せる、つまり**重ね合わせの原理**が成り立つということが知られている。これはポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ が線形微分方程式の解[2]ということから帰結されることなんだけど大変重要なポイントなんだ。



(1) を点電荷の集合体として書き直すと

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i \rho_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{3}$$

少し荒っぽいけど物理的イメージを掴むために (3) に (2) を代入すると

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_i \rho_i \Delta G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

ここで Δ を引き剥がして

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_i G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)\rho_i \tag{4}$$

(4) は (3) の一般解となっている。連続的な電荷分布に対する一般解も同様に考えて

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' \tag{5}$$

となる。くどいようだけど (5) の両辺に Δ を作用させると

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

となるから、(5) が連続電荷分布の場合のポアソン方程式の一般解ということになる。（スポドリをゴクリと飲んで）え〜っと、今までの議論を整理すると、位置 $\boldsymbol{r}$ でのポテンシャルを**結果**、そしてその結果を生み出す**原因**を点 $\boldsymbol{r}'$ の点電荷と考えると、グリーン関数は原因と結果を関係付ける関数である、言い換えるとグリーン関数 G は、点 $\boldsymbol{r}$ にポテンシャルを作る単一源 $\boldsymbol{r}'$ の効果を与えている、と言うことができる。

[2]線形微分方程式 $(y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x))$ では X, Y が解ならその一次結合も解となる。これを重ね合わせの原理と呼んでいる。

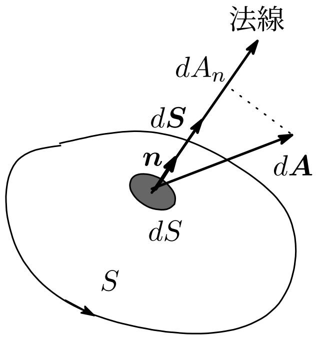
- エミリー：なるほどね。要約すると、系は線形微分方程式で記述されること。その方程式を解くのに、いきなり一般解を求めるのではなく、重ね合わせの原理の活用を考える。つまり、結果は原因の寄せ集めである、そしてこの時、活躍するのが原因と結果を関係付けるグリーン関数ということね。

- K氏：そうだね。まぁ、この辺の話はまた追々すると思うので、次に移ろうか。

2.1 ガウスの定理とグリーンの定理

2.1.1 ■ガウスの定理

- K氏：ガウスの定理はグリーンの定理を導出するのに必要になるので少し触れておこう。この定理は、体積積分を面積積分に次元を落とすというか、体積積分と表面積分との関係を与える重要な式だ。ベクトル $\boldsymbol{A}$ の界内に任意の閉曲面 S に囲まれた体積 V があるとき、S の全表面にわたっての $\boldsymbol{A}$ の表面積分 $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ つまり、この閉曲面を外方に通る $\boldsymbol{A}$ の全線束は、$\boldsymbol{A}$ の発散 $div\boldsymbol{A}(=\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ の V 全体に対する体積積分に等しい、ということだね。



これを式で表すと

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{7}$$

- エミリー：電磁気学の演習でよくお世話になる定理ね。

- K氏：そうだね。ついでに次の公式集も載せておくよ。証明は適当なベクトル解析のテキストを参照してね。

・閉曲面 S で囲まれた体積を V、スカラー関数 $\varphi(x,y,z)$ の曲面の法線方向の方向微係数を $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$、曲面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば

$$n\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{8}$$

$$\int_V \nabla\varphi dV = \int_S \varphi\,\boldsymbol{n}dS \tag{9}$$

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV = \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}dS \tag{10}$$

$$\int_V \nabla^2\varphi dV = \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \tag{11}$$

2.1.2 ■グリーンの定理

- K氏：次に、グリーンの定理だが、これはガウスの定理の表面積分と体積積分の関係を変形したものなんだ。閉曲面 S で囲まれた領域 V において、2 つの異なるスカラ関数 u、v に対し

$$\int_V (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_S u\boldsymbol{n} \cdot \nabla v dS \tag{12}$$

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV = \oint_S (u\nabla v - v\nabla u) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{13}$$

となる。これをグリーンの定理と呼んでいる。以下にこの証明をしてみよう。ガウスの定理 (7) と次のベクトル公式を使う。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \psi\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\psi A_z) \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} A_x + \psi \frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} A_y + \psi \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} A_z + \psi \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \\ &= \nabla\psi \cdot \boldsymbol{A} + \psi \nabla \cdot \boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{14}$$

$\psi = u$、$\boldsymbol{A} = \nabla v$ の時には　$\nabla \cdot (u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla^2 v$
従って

$$\int_V \nabla \cdot (u\nabla v) dV = \int_V (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla^2 v) dV$$

一方、ガウスの定理より上式左辺は

$$\int_V \nabla \cdot (u\nabla v) dV = \int_S u\boldsymbol{n} \cdot \nabla v dS = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

これで (12) は証明できた。次に、$\boldsymbol{A} = u\nabla v - v\nabla u$ として (7) に代入すると、

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \oint_S (u\nabla v - v\nabla u) \cdot d\boldsymbol{S}$$

一方、ベクトル公式 (14) を使って

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \int_V (\nabla u \cdot \nabla v + u\nabla^2 v - \nabla v \cdot \nabla u - v\nabla^2 u) dV = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2) dV \tag{15}$$

よって (13) が成立することが証明できた。

- エミリー：ガウスの定理とグリーンの定理はいわば同工異曲といったところね。ところでグリーンの定理というと

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (P\,dx + Q\,dy) \tag{16}$$

という形をテキストでよく見かけるけど、(13) の形とは異なっているわね。

- K氏：そうだね。(13) は 3 次元空間を扱っているが、(16) は平面におけるグリーンの定理と呼ばれているんだ。xy 平面における有界な閉領域を R とし、その境界を C とすると、2 重積分と線積分の関係を与えているんだね。この辺の話をするとわき道にそれるのでやめるけど、もっと知りたいと思ったら適当なベクトル解析の本を調べてごらん。

- エミリー：分かったわ、今は特にいいの。お話を進めて。

3　ヘルムホルツ型方程式のグリーン関数

3.1　ヘルムホルツ方程式

- K氏：さて、物理の方程式で一番よくお目にかかるのが次のヘルムホルツ方程式[3]だね。

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) + k^2\varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{17}$$

 例えば下に書いた自由粒子のシュレーディンガー方程式や波動方程式、拡散方程式などは、$\phi(t,\boldsymbol{r}) = T(t)\psi(\boldsymbol{r})$ と変数分離して空間座標のみに依存する $\psi(\boldsymbol{r})$ の満たす方程式を取り出すとヘルムホルツ方程式の形となる。尤も、各方程式にでてくる k はそれぞれ異なる k だよ。

 ● **Schrödinger 方程** $\quad i\hbar\dfrac{\partial\phi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(t,\boldsymbol{r}) \quad\longrightarrow\quad \nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0$

 ●**波動方程式** $\quad \dfrac{\partial^2\phi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t^2} = \alpha\nabla^2\phi(t,\boldsymbol{r}) \quad\longrightarrow\quad \nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0$

 ●**拡散方程式** $\quad \dfrac{\partial\phi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} = \beta\nabla^2\phi(t,\boldsymbol{r}) \quad\longrightarrow\quad \nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0$

- エミリー：そういえば１次元調和振動子も $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + k^2x(t) = 0$ となって、ヘルムホルツ方程式を満たすわね。先程のポアソン方程式も $k = 0$ とすればヘルムホルツ方程式の形になっている。ヘルムホルツ方程式というのはなにか物理の深いところを掴んでいるという感じね。

3.2　グリーン関数

3.2.1　グリーン関数の定義

- K氏：そうだね。しかしあまり突っ込まないようにね、ボロがでそうになるから (笑い)。ところで、ここであらためてグリーン関数というものを定義しておこうか。$\mathcal{L}$ をある線形微分演算子[4]とするよ。方程式

$$\mathcal{L}\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{18}$$

 に対するグリーン関数は、

$$\mathcal{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{19}$$

 を満たし、かつ次の境界条件のいずれかを満たす関数であると定義されるんだ。

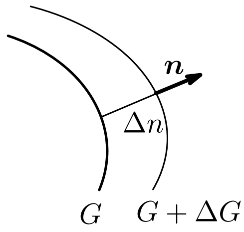
$$\begin{aligned} &\cdot\text{第 1 種境界条件} \quad : \quad \text{境界面上で } G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \\ &\cdot\text{第 2 種境界条件} \quad : \quad \text{境界面上で } \boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \\ &\cdot\text{第 3 種境界条件} \quad : \quad \text{境界面上で } A(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + B(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

 $\boldsymbol{n}$ は境界面上の外向き法線ベクトルで、A、B は同時には 0 にならないある関数だ。また、第 1 種境界条件をディレクレ条件、第 2 種境界条件をノイマン条件とも言っている。

- エミリー：境界条件の意味だけど、ディレクレ条件の場合は境界面上でグリーン関数の値が 0 となるという条件ね。ノイマンの場合は、境界面上におけるグリーン関数の法線方向の微係数 $(\boldsymbol{n}\cdot\nabla G = \frac{\partial G}{\partial n})$ を 0 とおくということね。

- K氏：そうなんだ。

[3] $\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) + k^2\varphi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})$ を非斉次ヘルムホルツ方程式という。
[4] 線形という意味は $\mathcal{L}(\phi_1 + \phi_2) = \mathcal{L}\phi_1 + \mathcal{L}\phi_2$ が成立することをいう。



$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla G = \frac{\partial G}{\partial n}$$

3.3 ヘルムホルツ型方程式のグリーン関数

- K氏：さて、ここでは次のヘルムホルツ方程式を取り上げて、そのグリーン関数[5]を求めていくこととしょう。

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{21}$$

ヘルムホルツ方程式に対するグリーン関数を

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{22}$$

とし、境界条件として第 3 種境界条件 $A(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + B(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0$ を設定する。ここで A、B は同時には 0 にならないある関数とする。
(21) の解をグリーン関数を使って求めるわけだが、そのプロセスでグリーン関数の相反性[6] $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ という性質が重要な役割を果たすので、まずそれに少し触れておこう。

- エミリー：ところで、境界条件を第 3 種としたのはより一般的な境界条件の設定とするためね。

3.3.1 グリーン関数の相反性

- K氏：そうなんだ、手間をはぶくというか (笑い)。さて、(13) のグリーンの定理と (21) を使って

$$\begin{aligned}
&\oint_S [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]\cdot \boldsymbol{n}dS \\
&\quad = \int_V [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')]dV \\
&\quad = -\int_V [G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')]dV \\
&\quad = G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}')
\end{aligned} \tag{23}$$

$B(\boldsymbol{r}) \equiv G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ とおいて境界条件より

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') = -A(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') \\
&G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\frac{A(\boldsymbol{r})}{B(\boldsymbol{r})}G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -A(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')
\end{aligned} \tag{24}$$

となるから (23) の左辺は 0 となる。ということで

$$G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = G(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}') \tag{25}$$

が証明された。

- エミリー：グリーン関数の相反性というのは境界条件と密接に関係しているのね。

[5] 今村勤著「物理とグリーン関数」(岩波全書)、夏目雄平・植田毅著「計算物理　(朝倉書店) 参照。
[6] グリーン関数の対称性とか可逆性とも呼ばれる。

3.3.2　ヘルムホルツ方程式の境界値問題

- K氏：そうだね。ところで、微分方程式を指定された境界条件の下で解くことを境界値問題というよね。ここでは、ヘルムホルツ方程式の境界値問題を少し考えよう。$\phi(\boldsymbol{r})$ は境界面上で何らかの境界条件を満たすものとし、グリーン関数は 3.2.1 の 3 種類の境界条件 (20) のいずれかを満たすものとする。ヘルムホルツ方程式の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ をグリーン関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を使って書き表わそう。グリーンの定理 (13)

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dV = \oint_S (u\nabla v - v\nabla u)\cdot d\boldsymbol{S}$$

に $u=\phi(\boldsymbol{r}),\, v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を代入して左辺の被積分関数を計算すると

$$\begin{aligned} u\nabla^2 v - v\nabla^2 u &= \phi(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) \\ &= \phi(\boldsymbol{r})\{-k^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\{-k^2\phi(\boldsymbol{r}) - \rho(\boldsymbol{r})\} \\ &= -\phi(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{26}$$

となるよね。そうするとグリーンの定理は次のように展開される。

$$\begin{aligned} \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dV &= -\int_V \phi(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV + \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= -\phi(\boldsymbol{r}') + \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= \oint_S [\phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r})]\cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{27}$$

ここで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を入れ替える。グリーン関数は相反性 (25) により $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ であるから

$$\begin{aligned} -\phi(\boldsymbol{r}) + \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' &= \oint_S \{\phi(\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}')\}\cdot d\boldsymbol{S}' \\ \therefore\quad \phi(\boldsymbol{r}) &= \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' + \oint_S [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\cdot d\boldsymbol{S}' \end{aligned} \tag{28}$$

となって、解 $\phi(\boldsymbol{r})$ をグリーン関数を使って表すことができた。

- エミリー：なるほど、めでたく求められたわけだけど、解をグリーン関数で表すのにグリーンの定理をうまく使っているのね。ヘルムホルツ方程式の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ は、グリーン関数の体積積分の項と表面積分の項の和から成り立っているのね。そして表面積分の項は先程のディレクレ条件とかノイマン条件、これらを含んだ第 3 種の境界条件等によって決まるということね。ところで (1) のポアソン方程式 $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})$ の解は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' \tag{29}$$

となって、(28) の右辺第 2 項の表面積分の項はなかったのだけど、これはどういう境界条件をつかっているのかしら？

- K氏：そうだね。ポアソン方程式の境界条件は **境界面がなく**、無限遠条件で

$$\lim_{|r|\to\infty} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \tag{30}$$

を満たすものと仮定しているんだ。このようなグリーン関数を主要グリーン関数とか基本的なグリーン関数、あるいは演算子 $\mathcal{L}$ の主要解と言っているよ。

さて、ヘルムホルツ方程式の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ の境界条件をグリーン関数と同じ境界条件 (20) を満たすものとすると

$$\begin{aligned} A\,G + B\,G' = 0 \qquad & \left(G' \equiv \frac{\partial G}{\partial n}\right) \\ A\,\phi + B\,\phi' = 0 \qquad & \left(\phi' \equiv \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

(28) の右辺第 2 項の被積分項は

$$\phi G' - G\phi' = \phi\left(-\frac{A}{B}G\right) - G\left(\frac{A}{B}\phi\right) = 0$$

となり、面積積分の項は 0 となって、ポアソン方程式の解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' \tag{32}$$

となる。一方、ヘルムホルツ方程式がグリーン関数の境界条件を満足しない場合には、境界の外部からの影響として (28) の第 2 項の面積積分の値が存在することになるんだ。ところで (28) は各種境界条件の下でどうなるかを以下に示しておこう。ここでグリーン関数は分かっているものとするよ。再度、解の表式を載せておくのでそれを参考にしながら吟味すればいいと思うよ。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' + \oint_S [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\cdot d\boldsymbol{S}' \tag{33}$$

1. <u>境界面上で $\phi(\boldsymbol{r})$ の値が指定されている場合（ディレクレ条件）</u>
この場合、境界面上で $\phi(\boldsymbol{r})$ の値が与えられるが、$\nabla\phi(\boldsymbol{r}')$ の値が未知だね。そこで、グリーン関数にディレクレ条件 ($G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$) を課してやると (33) の面積積分の第 1 項は 0 となり、$\nabla\phi(\boldsymbol{r}')$ の値を知る必要がなくなるね。あとは既知の量だから

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' - \oint_S \phi(\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{S}' \tag{34}$$

が解となるというわけだ。

2. <u>$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ が境界面上で指定されている場合 (ノイマン条件)</u>
この場合は、$\phi(\boldsymbol{r}')$ が与えれれていない未知の量だね。そこでこの量を消すためにグリーン関数にノイマン条件 ($\boldsymbol{n}\cdot\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$) を課してやる。そうすると $\phi(\boldsymbol{r}')$ を知る必要がなくなって

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' + \oint_S G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{S}' \tag{35}$$

が解となるね。

3. <u>境界面上で $A(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + B(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = C(\boldsymbol{r})$ の場合</u> この場合、グリーン関数には第 3 種境界条件を課する。

$$\left.\begin{aligned} AG + BG' &= 0 \\ A\phi + B\phi' &= C \end{aligned}\right\}$$

から

$$G\phi' - \phi G' = \frac{C}{B}G$$

解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' + \oint_S G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{C}{B}dS' \tag{36}$$

以上見てきたように、$\phi(\boldsymbol{r})$ の境界条件に対応してグリーン関数の境界条件を課すればスッキリした形になってくれるということが分かるだろう。境界値問題は一般にややこしいのでここではこれ以上追求しないが (汗；)、小野寺嘉孝著「物理のための応用数学」(裳華房) に分かりやすい例が載っているので図書館で調べてごらん。

- エミリー：わかったわ、大変おつかれさま〜。境界値問題を解くのにはは先程の (34)(35)(36) の積分を具体的に解いていくわけだから大変な労力が要りそうね。今日はその話題はいいの。
- K氏：(ホッとして）そッ、そうだね。オット、もう 12 時も大分回っているが昼飯でも食いに行かないかい、腹がへったら戦ができんからなぁ〜
- エミリー：さんせ〜い、お付き合いするわ。

. . . .

LUNCH　TIME

自由空間のヘルムホルツ方程式のグリーン関数

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \quad \lim_{|r|\to\infty} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0$$

1. 3 次元　$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \dfrac{e^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$
2. 2 次元　$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \pm\dfrac{i}{4}H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$　　$H_0^{(2)}$: 第 2 種ハンケル関数
3. 1 次元　$G(x, x') = \dfrac{i}{2k}e^{ik|x-x'|}$

偏微分方程式の分類

$$L(u) = A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = 0$$

$D = B^2 - AC$

1. 双曲型　$D > 0$　波動方程式　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　など
2. 放物型　$D = 0$　熱伝導方程式　$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　など
3. 楕円型　$D < 0$　ポアソン方程式　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x,y)$　など

4　ヘルムホルツ型方程式のグリーン関数

4.1　ヘルムホルツ方程式のグリーン関数

- K氏：地味な話ばかり続いてきたので少し退屈だっただろう。必要になったときにノートを読み返すといいよ。もし、今までの話で間違いを見つけたら是非一報頂戴、結構ありそうな気がするけど。。。さて、ここで眠気覚ましに多少指の運動をしようか。
ヘルムホルツ方程式
$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{37}$$
のグリーン関数を求めてみよう。と言っても先程の境界問題を解こうというのじゃないよ。いわゆる境界面がない場合で無限遠でグリーン関数が 0 になるというやつだ。グリーン関数の満たすべき方程式は
$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{38}$$
で、(3.3.2) で示したように無限遠境界条件
$$\lim_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to\infty} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \tag{39}$$
を満たすものを求めようというわけだ。(38) の非同次項 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ は $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ の関数だから、(38) の解も $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ のみの関数であると仮定する。空間座標において原点はどこにとっても一般性は失われないから $\boldsymbol{r}'$ を位置座標の原点に取ると
$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \equiv G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \longrightarrow G(\boldsymbol{r}), \quad \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \longrightarrow \delta(\boldsymbol{r}) \tag{40}$$
と書けるよね。$G(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換と逆変換を次のように定義する。
$$\hat{G}(\boldsymbol{p}) = \int G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} \tag{41}$$
$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{p} \tag{42}$$
デルタ関数のフーリエ積分表示は
$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{p} \tag{43}$$
(42) を (38) に入れて、微分と積分の順序を交換できるとすると[7]
$$\begin{aligned} \int (\nabla^2 + k^2)\hat{G}(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{p} &= \int (-p^2 + k^2)\hat{G}(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{p} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{44}$$
両辺の係数を比較すると
$$(-p^2 + k^2)\hat{G}(\boldsymbol{p}) = -1 \tag{45}$$
なる代数方程式が得られる。ところでデルタ関数の性質 $x\delta(x) = 0$、今の場合 $(p^2 - k^2)\delta(p^2 - k^2) = 0$ を考慮[8]し、形式的に議論を進めると
$$(p^2 - k^2)\hat{G}(\boldsymbol{p}) = 1 + c(p^2 - k^2)\delta(p^2 - k^2) \qquad (c : \text{定数}) \tag{46}$$
と書けるね。

[7] 公式：$\nabla^2 e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} = -p^2 e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$ を使う。

[8] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\{x\varphi(x)\}dx = [x\varphi(x)]_{x=0} = 0$

- エミリー：たしかにそのように書けるけど、、、でもなぜいきなりなぜデルタ関数をもち出したりするのかしら？

- K氏：実はある仕掛けがあるんだ。その仕掛けというのはね、こういうことなんだ。一見パッと見て発散するような積分、例えば $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ を考えてみよう。これは実は次のようにして発散する点を含んでいても解析的に解けることが示される。ここで $\mathcal{P}$ はコーシーの主値という意味だよ。

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x\pm i\epsilon}dx &= \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx \mp \int_{-\infty}^{\infty}[i\pi\delta(x)]f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x)\right]f(x)dx\end{aligned} \tag{47}$$

だから、超関数の意味で

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{x\pm i\epsilon}\right] = \mathcal{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x) \tag{48}$$

が成立する。

- エミリー：コーシーの主値は、この前キャサリンがKさんに聞いたノート[9]を読んだからかいいのだけど、“ 超関数の意味で ”とかいう超関数ってよく分からないんだけど。ところでただの P という字体ではなく、$\mathcal{P}$ というのも洒落てるわね。

- K氏：ありがとう、ちょっと変化をつけたんだ。ところで主値とか超関数はなにも説明していなかったね。ここでそれを説明しだすとわき道に入っちゃうから、ここは少し我慢してそういうもんだということにしておいてくれる。もう少し後で説明するから。

- エミリー：わかったわ。後の楽しみにしておくとしてお話を続けて頂戴。

- K氏：あいよ！ まぁ、そういうことで積分の発散を気にせずにというか、コーシーの主値を取るということで、(46) の両辺を p^2-k^2 で割るという荒業を使うわけだ。そうすると

$$\hat{G}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{P}\frac{1}{p^2-k^2} + c\delta(p^2-k^2) \tag{49}$$

と書けるだろ。ここで定数 c を $\mp i\pi$ とすると

$$\hat{G}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{P}\frac{1}{p^2-k^2} \mp i\pi\delta(p^2-k^2) \tag{50}$$

(48) と (50) を比較すると

$$\hat{G}(\boldsymbol{p})_{\pm} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon} \quad （複合同順） \tag{51}$$

と書けることがわかるだろう。これを (42) に入れると

$$G_{\pm}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{p} \tag{52}$$

と書ける。以上が仕掛けの全貌 (笑い) なんだ。

- エミリー：ふ〜ん、発散してしまうような積分をとにかく複素積分にまで持ち込んだ、というわけね。

[9] $Coffee\ Break$ の「対話・ローラン展開と留数・主値積分」を参照されたい。

- K氏：（少し興奮気味に）そういうことだ。次はいよいよこの積分を計算する番だが、複素積分計算の復習を兼ねて少し丁寧にやってみようか。
- エミリー：その前に先程の超関数って言うのを説明してくれるかしら。
- K氏：オット、そうだったね。それでは (48) の導出を通して超関数の説明をしようか。まず、簡単にコーシーの主値の復習をしておくね。

■コーシーの主値

関数 $f(x)$ が積分区間 $A \le x \le B$ 内の点 $x = a$ で有界でない (無限大になる) とする。このとき積分

$$\int_A^B f(x)dx$$

を考える。いま、$\epsilon_1 > 0$、$\epsilon_2 > 0$ なる微小な ϵ_1、ϵ_2 を使って上の積分を

$$I = \int_A^B f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_A^{a-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{a+\epsilon_2}^B f(x)dx \tag{53}$$

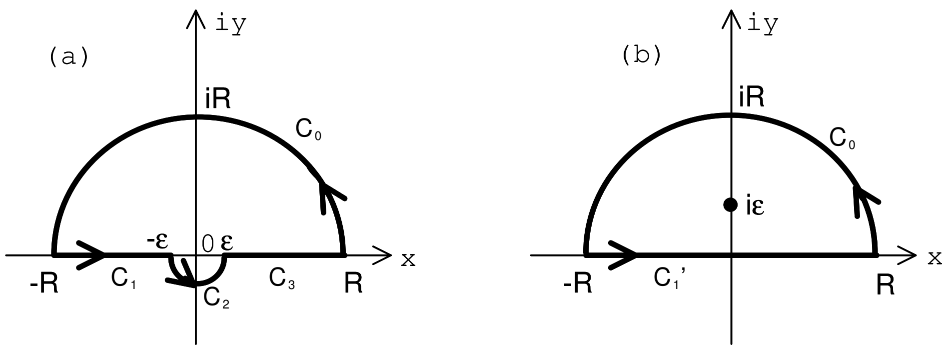
と定義する。ここで ϵ_1, ϵ_2 を独立に 0 に近づけたとき、極限操作の如何によって積分値 I はバラバラな値をとるが (つまり I は確定値をとらない)、$\epsilon_1 = \epsilon_2$ という条件をつけて極限をとれば I は確定値をとる場合がある。このとき、その確定値をコーシーの主値と呼んでいる。そしてそれを

$$I = \int_A^B f(x)dx = \mathcal{P} \int_A^B f(x)dx \tag{54}$$

と書く。まぁ、具体的な例はキャサリンのノートを見てね。

■コーシーの主値とデルタ関数の関係式

さて、(48) の導出をするわけだが、この式は $\dfrac{1}{x \pm i\epsilon}$ と $\dfrac{1}{x}$ から構成されているね。そこで次の積分経路の複素積分を考えてみようというわけだ。



一つは図 (a) で、$C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$ という経路をとる複素積分

$$\int_C \frac{\varphi(z)}{z}dz = \int_{C_0} \frac{\varphi(z)}{z}dz + \int_{C_1+C_3} \frac{\varphi(z)}{z}dz + \int_{C_2} \frac{\varphi(z)}{z}dz \tag{55}$$

もう一つは図 (b) で $C' = C_1' + C_0$ という経路をとる複素積分

$$\int_{C'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz = \int_{C_0} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz + \int_{C_1'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz \tag{56}$$

(55) は $\varphi(z)$ が C 内で正則とすればコーシーの積分定理[10]により

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_C \frac{\varphi(z)}{z}dz = 2\pi i\varphi(0) \tag{57}$$

ここでわざわざ $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ をとっているのは次の式とで符丁をあわすためだから気にしないこと (笑い)。(56) は、$z=-i\epsilon$ が 1 位の極であることから留数定理を使って

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_0} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_1'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} 2\pi i\varphi(i\epsilon) = 2\pi i\varphi(0)
\end{aligned} \tag{58}$$

つまり、(57) と (58) は等値ということになる。

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C} \frac{\varphi(z)}{z}dz \tag{59}$$

また、積分路 C_0 の積分値については

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_0} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz = \int_{C_0} \frac{\varphi(z)}{z}dz \tag{60}$$

となるよね。以上のことを整理すると、図 (a) の積分路 $C=C_0+C_1+C_2+C_3$ をとる複素積分 $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_C \frac{\varphi(z)}{z}dz$ と図 (b) の積分路 $C'=C_0+C_1'$ をとる複素積分 $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{C'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz$ は等値ということだ。つまり

$$\int_{C_1+C_3} \frac{\varphi(z)}{z}dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_2} \frac{\varphi(z)}{z}dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_1'} \frac{\varphi(z)}{z-i\epsilon}dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x-i\epsilon}dx \tag{61}$$

と書ける。積分路 C_1' は実軸上の積分路で $z=x$ となるから (61) の右辺の表式となるのはいいよね。だんだん求める表式に近づいてきた。いよいよデルタ関数[11]を導入して最後の仕上げにとりかかろう。(61) の左辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_3} \frac{\varphi(z)}{z}dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{R}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx
\end{aligned} \tag{62}$$

第 2 項は $z=\epsilon\, e^{i\theta}$ とおいて

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_2} \frac{\varphi(z)}{z}dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\varphi(\epsilon\, e^{i\theta})}{\epsilon\, e^{i\theta}} i\,\epsilon e^{i\epsilon}d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} i\varphi(0)d\theta = i\pi\varphi(0) \\
&= i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\{i\pi\delta(x)\}\varphi(x)dx
\end{aligned} \tag{63}$$

[10] $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$

[11] 超関数とは「普通の関数と組になって積分式の中に入り込んで、ある重要な作用を行う関数」とザックリ理解しておこう (篠崎寿夫他「デルタ関数入門」現代工学社)。最も有名なものにディラックの δ 関数がある。例えば、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a)$ で積分記号をはずし単に $f(x)\delta(x-a)$ と書かれる場合も多いが、あくまでこれは**積分の下でのみ意味を持つ式**であることを忘れないように。

右辺は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x-i\epsilon}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i\,\epsilon}dx \tag{64}$$

以上を整理すると

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\{i\pi\delta(x)\}\varphi(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i\,\epsilon}dx \tag{65}$$

従って、(65) は超関数の意味で

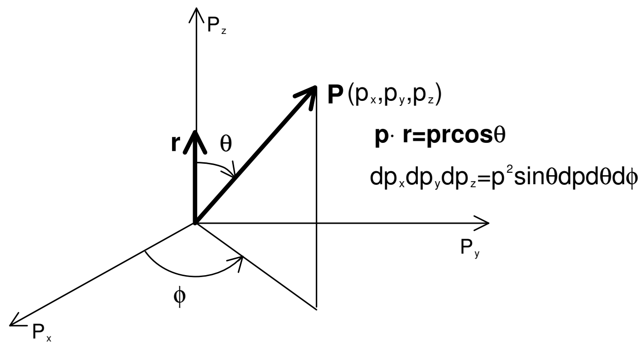
$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{x-i\,\epsilon}\right)=\mathcal{P}\frac{1}{x}+i\pi\delta(x) \tag{66}$$

と書ける。図 (a)(b) で積分路を x 軸に対象 (上下反転) に取り、同じような計算を行えば

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{x+i\,\epsilon}\right)=\mathcal{P}\frac{1}{x}-i\pi\delta(x) \tag{67}$$

が得られるが、これは宿題としておこう。

- エミリー：長い計算お疲れさま。これで (48) が成立することが証明されたわけね。“ 超関数の意味で ”ということもよくわかったわ。さて、グリーン関数に戻らないといけないわね。
- K氏：そうだね。ティータイムの前にそれを片付けておこうか。グリーン関数は (52) で与えられたね。そこで図のような座標系をとって $G_\pm(\boldsymbol{r})$ を計算しよう。いちいち $\lim_{\epsilon\to 0}$ をつけるのも面倒だし、省略するよ。



$$\begin{aligned}
G_\pm(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{p}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}e^{iprcos\theta}p^2dp\,sin\theta d\theta d\varphi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p^2dp\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}\int_0^\pi e^{iprcos\theta}sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2dp\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}\int_{-1}^{1}e^{-iprt}dt\qquad(-cos\theta=t\quad put)\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty p^2dp\frac{1}{-ipr}\frac{1}{p^2-k^2\pm i\epsilon}(e^{-ipr}-e^{ipr})\\
&=\frac{i}{8\pi^2r}\int_{-\infty}^{\infty}dp\frac{p}{p^2-k^2\pm i\epsilon}(e^{-ipr}-e^{ipr})\qquad[\text{積分区間 }[-\infty,\infty]\text{ に注意}
\end{aligned} \tag{68}$$

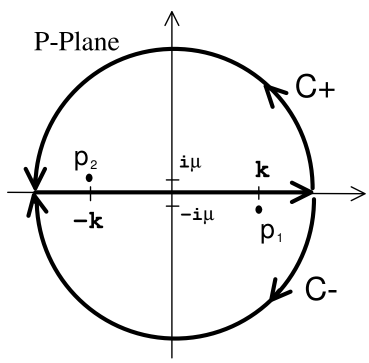
今、$G_+(\boldsymbol{r})$ を求めてみよう。(68) の分母は

$$
\begin{aligned}
p^2 - k^2 + i\epsilon = p^2 - (k^2 + i\epsilon) &= \left[\boldsymbol{p} - (k^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\boldsymbol{p} + (k^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \left[\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}\left(1 - i\frac{\epsilon}{2\boldsymbol{k}}\right)\right]\left[\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}\left(1 - i\frac{\epsilon}{2\boldsymbol{k}}\right)\right] \\
&= (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

ただし、$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{k}\left(1 - i\dfrac{\epsilon}{2\boldsymbol{k}}\right) = \boldsymbol{k} - i\mu, \quad \boldsymbol{p_2} = -\boldsymbol{k}\left(1 - i\dfrac{\epsilon}{2\boldsymbol{k}}\right) = -\boldsymbol{k} + i\mu, \quad \mu = \dfrac{\epsilon}{2\boldsymbol{k}}$
従って (68) は次のように書ける。

$$
G_+(\boldsymbol{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p\, e^{-ipr}}{(p - p_1)(p - p_2)} - \frac{i}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p\, e^{ipr}}{(p - p_1)(p - p_2)} \tag{70}
$$

(70) の第 1 項 (e^{-ipr})、第 2 項 (e^{ipr}) はそれぞれ複素平面の下反面と上半面で r の増大に伴い指数関数的に減少するので、上半面、下半面に十分大きな半円 C_+, C_- の積分路を加え、それらの半径を無限大にとっても積分値は変わらないだろう。そこで半円を閉じた積分路とする複素積分に置き換え、留数定理を使うんだ。(70) は、さきほど預けていた $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ を取り戻してきて



$$
\begin{aligned}
G_+(\boldsymbol{r}) &= \frac{i}{8\pi^2 r}\lim_{\mu \to 0}\oint_{C_-} d\boldsymbol{p}\frac{p\, e^{-ipr}}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2)} - \frac{i}{8\pi^2 r}\lim_{\mu \to 0}\oint_{C+} d\boldsymbol{p}\frac{p\, e^{ipr}}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2)} \\
&= \frac{i}{8\pi^2 r} 2\pi i \lim_{\mu \to 0}\left[-\frac{\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2} e^{ip_1 r} - \frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p}_1} e^{ip_2 r}\right] \\
&= \lim_{\mu \to 0}\left[\frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p_2}}(\boldsymbol{p}_1 e^{ip_1 r} + \boldsymbol{p_2} e^{ip_2 r})\right] = \frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k} e^{-ikr} + \boldsymbol{k} e^{-ikr}) \\
&= \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}
\end{aligned}
\tag{71}
$$

としてグリーン関数の具体的形が求まった。$G_-(\boldsymbol{r})$ の計算は宿題としておくけど、結果は $G_-(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi r} e^{ikr}$ となるね。だから方程式 (37) の主要解であるグリーン関数は[12]

$$
G_\pm(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{\mp ikr} \quad (\text{複合同順}) \tag{72}
$$

- エミリー：お見事ね！留数定理をうまく使って計算しているのね。キャサリンのノートを再度読み返しておくわ。ところで $G_\pm$ の $\pm$ 符号は何を意味しているのかしら？

[12] 今までの計算でベクトル $vecp$ とスカラー p がごちゃごちゃとややこしく記法間違いがあるかも知れません (汗;)。

- K氏：$G_{\pm}$ はそれぞれ内向きと外向きの球面波を表しているんだ。この辺の詳しいことは砂川重信著「散乱の量子論」(岩波全書) なんかを参照するといいと思うよ。さぁ、ここらでコーヒーブレイクでもしようか。

- エミリー：さんせ〜い。丁度、昨日買ったコーヒー豆がバッグに入っているのでミルにかけて美味しいのを淹れるわ。それと昼食の帰りに買ってきたケーキを冷蔵庫に入れておいたからそれもご馳走するわ。

- K氏：それはありがたい。オ〜ッ、コーヒーのええ香りがするねぇ〜。。。

$\mathcal{TEA}\quad\mathcal{TIME}$

老婆心

次の積分を考えよう。キャサリンのノートを読んでいれば不要だが。。。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx$$

この積分は次の複素積分の右辺第 1 項に相当する。積分路は半径 R の上半円 C とする。

$$\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}+\int_{\text{半円}}\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}dz$$

左辺の積分は留数定理を使って計算できる。右辺第 2 項は $R\to\infty$ の極限でジョルダンの補助定理より 0 となるから、結局求める積分の値は左辺の積分値に等しい。

4.2 波動方程式のグリーン関数

4.2.1 遅延条件解

- K氏：コーヒーとケーキご馳走さま。美味しかったね。さて、いろいろ寄り道してヘルムホルツの方程式のグリーン関数を求めてきたわけだが、最後に波動方程式のグリーン関数を求めてみよう。

- エミリー：エッ、もうおしまいなの？　まだまだグリーン関数について聞きたいことがあるのに。たとえば量子物理におけるグリーン関数、特に散乱 S 行列理論での Lippmann-Schwinger 方程式にでてくるグリーン関数とか、、、

- K氏：(ドキマキしながら）エミリーはいろいろ難しいことを知っているのだね。それらの話はまた次の機会を捉えてすることにして、今日の話しはグリーン関数の基本編ということで勘弁してもらえないかなぁ。

- エミリー：そうね、わかったわ。難しいこと知ってるねといわれても、ただの聞きかじりだけなのよ。

- K氏：そうなんだ。まっそれはともかく次の波動方程式を考えよう。今度は空間座標に加えて時間も入ってくるよ。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{r},t) = -\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{73}$$

この波動方程式に対するグリーン関数の満たす方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{74}$$

だね。ところで今回は時間が方程式に入っているから、いわゆる因果律[13]というのに留意する必要がある。つまり、最初に言ったようにグリーン関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ を時空点 $\boldsymbol{r}'$、t' の単一源の作用が時空点 $\boldsymbol{r}$、t に及ぼす影響であるとすると、グリーン関数は次の条件を満たさなければならないだろう。

$$G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') = 0 \quad (t < t') \tag{75}$$

(75) を**遅延条件**というんだ。この条件下での解を遅延条件解というが、以下にこの解を求めよう。$G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ を $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$、$t-t'$ のみの関数と仮定[14]する。空間座標で原点はどこにとっても一般性をそこなわないから、ここでは $\boldsymbol{r}'$ を位置座標の原点にとり、それにあわせて時間も定めると

$$G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') \equiv G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t') \longrightarrow G(\boldsymbol{r},t) \tag{76}$$

と書ける。t についてのフーリエ変換[15]

$$\hat{G}(\boldsymbol{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r},t)e^{i\omega t}dt \tag{77}$$

と定義する。(74) の両辺に $e^{i\omega t}$ を掛け、t で積分する。
まず左辺から

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{r},t)e^{i\omega t} = \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\boldsymbol{r},\omega) \tag{78}$$

右辺は

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dt\delta(\boldsymbol{r})\delta(t)e^{i\omega t} = \delta(\boldsymbol{r}) \tag{79}$$

$k \equiv \omega/c$ とおくと (74) は

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\hat{G}(\boldsymbol{r},\omega) = -\delta(\boldsymbol{r}) \tag{80}$$

となる。無限遠でグリーン関数が 0 となる条件を満たすものはすぐ上で求めたから

$$\hat{G}(r,\omega) = \frac{1}{4\pi r}e^{i\frac{\omega}{c}r} \tag{81}$$

である。これをフーリエ逆変換すると求めるグリーン関数が得られる。

$$\begin{aligned} G(r,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(r,\omega)e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi r}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \\ &= \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) \end{aligned} \tag{82}$$

[13]時刻 t である現象を生み出す原因は、常にその時刻 t よりも前の時刻になければならない。
[14](74) の非同次項 (δ 関数）が $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$、$t-t'$ の関数となっている。
[15]$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega}dx$ を $f(x)$ から $F(\omega)$ へのフーリエ変換という。フーリエ逆変換は $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega}dx$

ここで次の公式を使った

$$\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega \tag{83}$$

$t<0$ に対しては δ 関数が実質的に 0 である[16]から (82) は (75) の遅延条件を満たす。このグリーン関数を遅延グリーン関数と呼んで $G_{ret}(r,t)$ と書いたりするね。
グリーン関数 (82) は、波動方程式 (73) の解、いまこれを電磁ポテンシャルとすると、ポテンシャルが r/c の時間遅れを伴って空間を伝播していく様子を示していることが分かる。このポテンシャルを遅延ポテンシャルと呼んでいるが、詳しいことは適当な電磁気学のテキスト[17]を参照してね。

- エミリー：この辺の話になると伝播関数としてのグリーン関数のイメージが浮かび上がってくるようね。

4.2.2 先進条件解

- K氏：そうだね。次に先進解を求めてみようか。
- エミリー：少し顔色が優れないようだけど、がんばっていただけるのね。
- K氏：うん、正直ちょっと疲れてきたけど、この話で今日は最後にしよう思うと頑張りもでてきたよ。さて、遅延グリーン関数を $G_{re}(r,t)$ と書いたから先進グリーン関数を $G_{adv}(r,t)$ と書こう。先進条件は

$$G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')=0 \quad (t>0) \tag{84}$$

(81) の代りに無限遠で 0 となる条件を満たす (80) の解として

$$\hat{G}(r,\omega)=\frac{1}{4\pi r}e^{-i\frac{\omega}{c}r} \tag{85}$$

を使うと

$$G_{adv}(r,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t+\frac{r}{c}\right) \tag{86}$$

が得られる。計算は一応フォローしておいてね。r、c とも正の値だから $t>0$ に対して δ 関数は 0 となるので先進条件を満たすことが分かる。いままでの話を整理すると

$$\begin{aligned}\text{遅延グリーン関数：}\quad G_{ret}&=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\\ \text{先進グリーン関数：}\quad G_{adv}&=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)\end{aligned} \tag{87}$$

ということだね。

- エミリー：そういうことなのね。よく分かったわ。もう外が暗くなり始めたけど今日は本当にありがとう。デートは中止になったけど、おかげさまでとっても有意義な一日を送ることができたわ。
- K氏：それはなによりだ。それじゃ気をつけてお帰り。自転車のランプを点けることを忘れないようにね。
- エミリー：ハ〜イ！　それではさよなら〜。
- K氏：気をつけてね〜

($\mathcal{END}$)

[16] $\delta(t-r/c)=1(t=r/c), \delta(t-r/c)=0(t\neq r/c)$
[17] 高橋康著「電磁気学再入門」（講談社）、砂川重信著「理論電磁気学」(紀伊国屋書店) 等