テンソル談議

KENZOU

2007 年 5 月 05 日

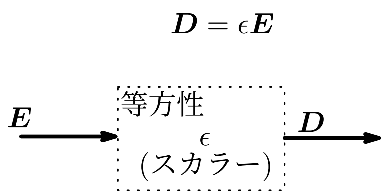
ゴールデンウィークもいよいよ終盤を迎えたある日、テニスで少し日焼けしたエミリーが自転車を快適に走らせてK氏を訪ねてきた。

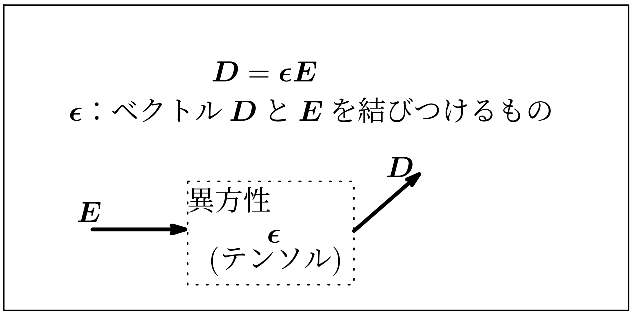
1 テンソルとはなんだ

- エミリー：こんにちわ〜K さん、お元気ですか〜。
- K氏：いやぁ〜エミリー、こんにちは。ずいぶん久しぶりだねぇ〜。少し日焼けしているようだけどこの GW をエンジョイしているようだね。
- エミリー：そうなの、テニスをやりすぎて少し日焼けしたかな。
- K氏：ところで今日はなんだい。僕の淹れるおいしいコーヒーでも飲みたくなってきたのかい、歓迎するよ。
- エミリー：ありがとう。でもとくにコーヒーが飲みたくてきたわけじゃないの。実は最近テンソルというものを勉強し始めたのだけど、ベクトルとちがってイメージがつかみにくいのよ。そこをスッキリしたくて K さんを尋ねてきたというわけなの。
- K氏：そういうことなんだ、了解。ところで夏場の海辺はパラソルが一杯開くけど、パラソルとテンソルとは直接何の関係もないよね。
- エミリー：ほとんど面白くない冗談はそのくらいにして、お話を進めていただけるかしら、,,
- K氏：（うっふぉーんと咳払いして）そうだね。さて、それではまずテンソルというもののイメージを掴むところから始めようか。電磁気学を勉強すると誘電率テンソルというものにでくわしたりするだろう。今、誘電体の電束密度を $\boldsymbol{D}$、電場を $\boldsymbol{E}$ とすると、え〜っと、これらはともにベクトル量であることはいいよね。誘電体が等方性の時には、電場と電束密度の方向は一致するから

  $$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$$

  となって、誘電率 ϵ は向きも方向も持たない、大きさだけを持つスカラー量だ。ここまではいいよね。問題は誘電体が異方性の時なんだね。このときにはベクトル $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の方向は一致しなくなる。だから、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ を結び付ける ϵ は単なるスカラー量ですよとは言ってられなくなる。だからなんだということになるんだが、つまりテンソルはベクトルとベクトルを結びつけるブラックボックスのようなものだね。このブラックボックスは一体どのようなものか、これを追求していこう。
- エミリー：なにかわくわくしてきたわ。楽しみね。





- K氏：さて、ここで一般論を展開しておこうか。あるベクトル $\boldsymbol{y}$ がベクトル $\boldsymbol{x}$ の関数であるとして

$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} \tag{1}$$

と書くことにするよ。ここで $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ と書くこともあるよ。ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられると別のベクトル $\boldsymbol{y}$ が得られるという関係だね。T はベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して実数を対応させる関数ということを書いている本もあるね。そしてベクトル変数の関数 T は線形関数であるとするよ。つまり

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= T\boldsymbol{x}_1 + T\boldsymbol{x}_2 \\ T(\alpha \boldsymbol{x}) &= \alpha T\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2}$$

という関係式を満たすものだね。
さて，これからいろいろ添え字がでてくるから，話の見通しをスッキリするために次の約束をしておくよ。ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を上付き添字を使って x^1, x^2, x^3 と書いた場合は縦ベクトルを表し，下つき添字の場合は横ベクトルを表すものとしよう。具体的に書けば次のようになるよね。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x^i \boldsymbol{e}_i \equiv x^i \boldsymbol{e}_i \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}^i \equiv x_i \boldsymbol{e}^i \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルで，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{e}^1 = (1\ 0\ 0),\ \boldsymbol{e}^2 = (0\ 1\ 0),\ \boldsymbol{e}^3 = (0\ 0\ 1) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{e}^i\,\boldsymbol{e}_j = \delta^i{}_j \tag{7}$$

- エミリー：う〜ん，なぜ上付き，下付き添字を使うのか今のところよくわからないけど，まぁしばらく我慢しておくわ。ところで x^i とした場合，縦ベクトルを表すとしたんだったら，$\boldsymbol{e}^i$ も縦ベクトルとすべきなのに横ベクトルとしているのね。

- K氏：そうだね。ここはまぁそのように約束しておくと軽く考えておけばいいと思うよ。ところで式 (3) や (4) の一番右辺は Σ を省略しているけど，これはアインシュタインの規約と呼ばれるルールなんだが，そのことはよく知っているよね。

- エミリー：ええ，知っているわ。「一つの項の中に同じ添字が２回現れた場合，その添字について和をとる」というものでしょう。

- K氏：そうだね。ついでに上付き添字, 下付き添字がでてきたのでもう少し詳しく言うと「上と下に同じ添字がでてきたら，その添字について和をとる」ということだね。さて，式 (1) に戻って計算を進めてみよう。T の線形性を使って右辺を計算すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} &= T(x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3) \\ &= Tx^1\boldsymbol{e}_1 + Tx^2\boldsymbol{e}_2 + Tx^3\boldsymbol{e}_3 \\ &= x^1T\boldsymbol{e}_1 + x^2T\boldsymbol{e}_2 + x^3T\boldsymbol{e}_3 \\ &= x^iT\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{8}$$

となるね。つまりこれでベクトル $\boldsymbol{y}$ を成分に分解表示したことになるね。ところでベクトル $\boldsymbol{y}$ は基底ベクトルを使って書けば

$$\boldsymbol{y} = y^1\boldsymbol{e}_1 + y^2\boldsymbol{e}_2 + y^3\boldsymbol{e}_3 \tag{9}$$

となる。式 (7) を使って　$y^1 = \boldsymbol{e}^1\boldsymbol{y}, \quad y^2 = \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{y}, \quad y^3 = \boldsymbol{e}^3\boldsymbol{y}$　が得られるよね。これはまとめて (アインシュタインの規約が働いていることを忘れないように)

$$y^k = \boldsymbol{e}^k\boldsymbol{y} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{10}$$

と書けるね。この右辺の $\boldsymbol{y}$ に式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} y^k &= \boldsymbol{e}^k x^i T\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}^k T\boldsymbol{e}_i)x^i \\ &= T^k{}_i x^i \quad \text{ただし}\ T^k{}_i = \boldsymbol{e}^k T\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{11}$$

これが式 (1) の実体ということになるんだ。もっと詳細に書くと

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

となって，この $T^k{}_i$ を２階テンソルと呼んでいるんだね。なぜ２階かというと添字が２つ付いているから２階と言うんだね。そして添字の k と i の組み合わせには 3×3 あって，２階テンソルは 9 成分（つまり 3^2) ということになるね。

- エミリー：そうすると０階や１階，３階や n 階のテンソルというものもあるわけで，それぞれの成分の数は $3^0, 3^1, 3^3, 3^n$ となるわけね。ところで式 (12) のテンソルはマトリクスの形に書かれているけど，テンソルはマトリクスの一種なのかしら。

- K氏：確かにそういう誤解を生みやすいね。たまたま２階テンソルは 3×3 のマトリクスの形に表現できたというだけで,「テンソル＝マトリクス」ではないんだ。いまはそういうことに注意をしておくだけでいいと思うよ。

- エミリー：そうなんだ。え〜っと，そろそろ表題の「テンソルとはなんだ」ということのまとめをやっていただけるかしら。

- K氏：そうだね。少し数学的な話になるけど

(1) 2 階テンソルは任意のベクトルを別のベクトルに変換する線形変換の作用素として定義される。つまり，ある変換を T として，任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，

$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$$

によってベクトル $\boldsymbol{x}$ が他のベクトル $\boldsymbol{y}$ に変換され，かつこの関係が線形 (式 (2) 参照) であるとき T をテンソルと呼ぶ。

(2) テンソルの成分 $T^i{}_j$ は

$$T^i{}_j = \boldsymbol{e}^i T \boldsymbol{e}_i$$

で与えられる。これからベクトル $\boldsymbol{y}$ は次のマトリクス表示で表記することができる。

$$y^i = T^i{}_j x^j$$

ということだね。

- エミリー：まとめ，ありがとう。ところで抽象的なお話が少し続いたので演習問題をやってみたいわ。

- K 氏：そうだね。それでは
「ベクトル $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a^1, a^2, a^3; b^1, b^2, b^3$ とすれば

$$\begin{matrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{matrix}$$

はテンソルを表す。」というのをやってみようか。
$T^1{}_1 = a^1b^1, T^1{}_2 = a^1b^2, T^1{}_3 = a^1b^3;\quad T^2{}_1 = a^2b^1, T^2{}_2 = a^2b^2, T^2{}_3 = a^2b^3;$
$T^3{}_1 = a^3b^1, T^3{}_2 = a^3b^2, T^3{}_3 = a^3b^3$
とおく。これは式 (12) の $T^i{}_j$ を与えたことになるね。次に任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を v^1, v^2, v^3 とすると

$$\begin{aligned} T^1{}_1v^1 + T^1{}_2v^2 + T^1{}_3v^3 &= a^1(b^1v^1 + b^2v^2 + b^3v^3) = a^1(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) \\ T^2{}_1v^1 + T^2{}_2v^2 + T^2{}_3v^3 &= a^2(b^1v^1 + b^2v^2 + b^3v^3) = a^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) \\ T^3{}_1v^1 + T^3{}_2v^2 + T^3{}_3v^3 &= a^3(b^1v^1 + b^2v^2 + b^3v^3) = a^3(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

これは明らかにベクトル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})$ の成分だから，与えられた 9 個の数の組はテンソルを表す，ということになるね。

- エミリー：確かに式 (12) が成り立つからテンソルということになるのね。

- K 氏：次にベクトルは 1 階のテンソルだということを示そう。ある特定のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ との内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i = a^i b^i$$

で実数となる。これをベクトル変数 $\boldsymbol{b}$ の関数と考えて

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

と表せば，次のように線形性が成立する。

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$$
$$\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{ab}$$

この式と (2) を見比べてみよう。そうするとベクトル $\boldsymbol{a}$ は T に相当していることがわかるよね。つまり，ベクトル $\boldsymbol{a}$ はそれ自身 1 個のベクトル変数について線形性をもつ実数値関数であると考えることができる。それゆえベクトルは 3 成分だから 1 階のテンソルであるということができる，というわけなんだ。

- エミリー：なるほどねぇ〜。なんとなくテンソルというものが分かってきたような気がするわ。そこでついでだから n 階のテンソルについて紹介していただけるかしら。
- K 氏：うっふぉ〜ん，そうくると思ったよ。一般に n 個の任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に対して実数値 $T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を対応させる関数 T があって，それぞれのベクトル変数について線形性

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{x}_r{}', \cdots, \boldsymbol{x}_n) &= T(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + T(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r{}', \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ T(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \alpha\boldsymbol{x}_r, \cdots, \boldsymbol{x}_n) &= \alpha T(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{13}$$

が成り立つとき，関数 T を n 階のテンソルといい，n をそのテンソルの階数といっているんだ。ベクトルは 1 階のテンソルだったね。スカラーは 0 階のテンソルと見なされるよ。まぁ，この辺の話は座標変換のところに行くともっとスッキリするんだがね，それまでのお楽しみとしておこう。
- エミリー：ずいぶん思わせぶりなお言葉ね。まっ，いいわ。少し疲れたのでティータイムでもしましょうか。おいしいコーヒー豆を買ってきたからご馳走するわ。
- K 氏：それはありがたい。では早速コーヒーをいただこうかな。

Coffee Break

- K 氏：テンソルの大体のイメージはつかめたかい。
- エミリー：そうね，まだ怪しいけど，テンソルは任意のベクトル $\boldsymbol{x}(x^1, x^2, x^3)$ をベクトル $\boldsymbol{y}(y^1, y^2, y^3)$ に変換する一次変換というものなのね。
- K 氏：まったくその通りなんだ。最初に誘電率テンソルのことを話しただろう。これは誘電体が異方性の場合には電束密度 $\boldsymbol{D}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ のベクトル一次関数で，$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ の成分をそれぞれ $D_x, D_y, D_z; E_x, E_y, E_z$ とすると，面倒だから添字は全部下付きで書くけど

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11}E_1 + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z \\ D_y &= \epsilon_{21}E_1 + \epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z \\ D_z &= \epsilon_{31}E_1 + \epsilon_{32}E_y + \epsilon_{33}E_z \end{aligned}$$

と書けるよね。この ϵ_{ij} を誘電率テンソルと呼んでいるんだが，このテンソルは $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$，$\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$，$\epsilon_{31} = \epsilon_{13}$ という特長があり，対称テンソルといわれているんだ。このことは後でまた話するよ。ついでに電場のエネルギー密度を求めておくと

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11}E_x^2 + \epsilon_{22}E_y^2 + \epsilon_{33}E_z^2 + 2\epsilon_{12}E_xE_y + +2\epsilon_{23}E_yE_z + 2\epsilon_{31}E_zE_x)$$

となるよね。これは上の関係式を代入して計算すればすぐ得られるよね。

2　対称テンソルと反対称テンソル

- K氏：コーヒーご馳走さま。それでは話を次に進めようか。
- エミリー：大変だけどお願いするわ。
- K氏：先ほど対称テンソルの紹介をしただろう。これを少し詳しく見ていこうか。対称テンソルとはテンソル T の成分

$$\begin{matrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{matrix}$$

で，$T^1{}_2 = T^2{}_1, \quad T^1{}_3 = T^3{}_1, \quad T^2{}_3 = T^3{}_2$ が成り立つとき，つまり

$$T^i{}_j = T^j{}_i \tag{14}$$

が成り立つとき，これを対称テンソルと呼んでいる。また，

$$\begin{aligned} &T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = 0 \\ &T^1{}_2 = -T^2{}_1, \quad T^2{}_3 = -T^3{}_2, \quad T^3{}_1 = -T^1{}_3 \end{aligned} \tag{15}$$

が成り立つとき，これを反対称テンソルとか交代テンソルと呼んでいる。反対称テンソルの成分は

$$\begin{matrix} 0 & T^1{}_2 & -T^3{}_1 \\ -T^1{}_2 & 0 & T^2{}_3 \\ T^3{}_1 & -T^2{}_3 & 0 \end{matrix}$$

となるから，反対称テンソルはその 3 つの成分 $T^1{}_2, T^2{}_3, T^3{}_1$ によって定まることになるね。対称テンソル，反対称テンソルのテンソルの定義に戻ったもう少し厳密な定義の仕方があるんだが，今はこれで満足しておくことにしよう。