相対論的量子力学

by KENZOU

2004年1月24日

　これは インターネットからダウンロードした「岡真著：相対論的量子力学講義ノート（第2版)」のメモ作成を LaTeX 2_ε の勉強も兼ねて作ったものです。

1　相対論の復習

1.1　ローレンツ不変性

x 方向のローレンツブースト

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \tag{1}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2}$$

$$\text{を用いると} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$ を満たすことから $\gamma = \cosh\theta, \gamma\beta = \sinh\theta$ 。

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & cosh\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & i\sin(i\theta) \\ i\sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

これは2次元 (ict, x) 平面内での回転を表す。一般にローレンツ変換は時間を虚数とする4次元空間のすべての回転変換に対応している。
[1]

[1] $\cosh\theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2, \sinh\theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2, \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1, \cosh\theta = \cos(i\theta), \sinh\theta = -isin(i\theta)$

1.2　共変形式

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{5}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \tag{6}$$

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2\right) \tag{7}$$

1.3　自然単位系

光速度を単位として測る。光速度を1とする単位系が便利。

$$c = 1$$

こうすると時間 t は光の速度 c でその間に走る長さ ct で表される。

$c = LT^{-1} = 1$ より　$T = L$

$[\hbar] = [xp] = L^2T^{-1} = 1$ より　$L = M^{-1}$

$c = \hbar = 1$ ととる単位系ではすべて質量の単位で表される。この単位系を自然単位と呼ぶ。

2　量子力学と相対論

2.1　非相対論的量子力学の復習

ハミルトンの運動方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

運動量演算子 ($\hbar = 1$)

$$p \longrightarrow \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{8}$$

シュレーデインガー（Schrödinger) 方程式

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(x,t) = 0$$

波動関数 $\psi(x,t)$ は $|\psi|^2$ が時刻 t で粒子が $(x, x+dx)$ に存在する確率を与える。

確率の保存

確率密度 $\rho(\vec{x},t) \equiv \psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)$ 連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{9}$$

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}), \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

連続の方程式の相対論的共変形式

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{10}$$

2.2 電磁場中の粒子の古典論

スカラーポテンシャル $\Phi(\vec{x},t)$, ベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{x},t)$

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - e\vec{A}(\vec{x},t)$$

$$H \longrightarrow H + e\Phi(\vec{x},t)$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi \tag{11}$$

電磁場の共変形式

4 元ベクトル　　$A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})$

電磁場テンソル　$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$Einstein$ の関係式

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \longrightarrow H = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

自由粒子に対する相対論的ハミルトニアンで正のハミルトニアンを採用する（負のハミルトニアンは負エネルギー解に対応する）。

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \tag{12}$$

2.3 相対論的量子力学の試み

シュレーディンガー（Schrödinger) 方程式

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(x,t) = 0$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi$$

運動量演算子 $p = -i\nabla$ をハミルトニアンに入れると

$$\left[i(\partial_t + ie\Phi) + \frac{1}{2m}(\nabla - ie\vec{A})^2\right]\psi = 0$$

これはシュレーディンガー方程式で次の置き換えをしたものとなっている。

$$\partial_t \longrightarrow \partial_t + ie\Phi$$

$$\nabla \longrightarrow \nabla - ie\vec{A}$$

共変形で書くと

$$\partial^\mu \longrightarrow \partial^\mu + ieA^\mu$$

$$\left[\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})\right]$$

相対論的シュレーディンガーの方程式導出の試み
自由粒子に対する相対論的ハミルトニアン $H = \sqrt{p^2 + m^2}$ より

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi(\vec{x},t)$$

この方程式は

- 時間微分と空間微分が非対称 $\longrightarrow$ 相対論の共変性があらわではない
- 微分を含む平方根演算子を含んでいる $\longrightarrow$ テイラー展開すれば高次の微分を無限に含む非局所的演算子（※）となる

となって、「情報が光速よりも速く伝わらない」とするアインシュタインの因果律を破ってしまうことも解っている（つまり**無限階数**の微分が入ってくると有限遠方の場が効いてくる遠隔作用論が顔をだし、因果律と矛盾することになる)。したがって、この方程式を相対論的量子論の基礎に置くことはできない。

ところで、自由粒子に対する相対論的ハミルトニアンでマイナスのハミルトニアン（負のエネルギー）を捨てたが、これが後でたたることになる。

(※) 高次の微分は遠方からの寄与を含む。$x_i = x + ih (i = 0, 1, \cdots, n)$ として

$$h^n f^{(n)}(xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-1} \binom{n}{i} f(x+ih), \qquad x < xi < x + nh$$

2 階微分では点 x の両隣における関数の値が関係し、3 階微分ではさらにもう一つ向こう側の両隣 $\cdots$ というように、微分の階数が上がるにつれてますます遠くのほうの関数の値が関係してくる。

【おまけ】相対論的シュレーディンガー方程式は因果律と矛盾する
Schrödinger eq

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi(\vec{x}, t)$$

Fourie 変換 $\quad \psi(\vec{x}, t) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int d^3k\phi(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\vec{x}}, \qquad \nabla \longrightarrow -i\vec{k}$

$$\sqrt{m^2 - \nabla^2}\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}\phi(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

ϕ で書き換えた Schrödinger eq

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{k}, t) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}\phi(\vec{k}, t)$$

一般解

$$\phi(\vec{k}, t) = e^{-i\omega_k t}\phi(\vec{k}, 0), \qquad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

・因果律との矛盾
初期条件 ($t = 0$ で原点に局在)： $\psi(\vec{x}, t = 0) = \delta^3(\vec{x})$

$$\delta^3(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} \longrightarrow \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\phi(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

$$\downarrow$$

$$\psi(\vec{x}, t = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\phi(\vec{k}, 0)e^{i\vec{k}\vec{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} \longrightarrow \phi(\vec{k}, t = 0) = 1$$

$$\downarrow$$

$$\phi(\vec{k}, t) = e^{-i\omega_k t}\phi(\vec{k}, 0) = e^{-i\omega_k t}, \qquad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

・任意の時刻における ψ

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t}$$

- ψ **の** *Shorödinger eq*

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{\omega_k^2}{\omega_k}e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_k t} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_k}(m^2+\vec{k}^2)e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_k t} \\
&= (m^2-\nabla^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_k}e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_k t} \\
&= (m^2-\nabla^2)2i\mathit{\Delta}^{(+)}(x,m) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

- $\mathit{\Delta}^{+}(x,m)$ **について**

$$
\mathit{\Delta}^{+}(x,m) = -\frac{i}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_k}e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_k t}
$$

$\mathit{\Delta}^{+}(x,m)$ はLorentz不変な関数。この積分は一般の場合初等関数では表せない。光円錐の外側、空間的な場合絶対値 z の関数として次のように振舞う。

$$
\Delta^{(+)} \propto \frac{1}{z} \qquad (z\text{が小さい場合})
$$

$$
\Delta^{(+)} \propto \frac{e^{-mz}}{\sqrt{z}} \qquad (z\text{が大きい場合})
$$

光円錐の外側では関数値は0でないと困る。それは光速度より速く信号が伝わることになるから。この結果、上の方程式は因果律に反することになる。この矛盾は負のエネルギー解を勝手に捨てたことに由来する。

2.4 クライン－ゴードン方程式

上の困難は微分を含む平方根演算子から生じた。アインシュタインの公式

$$
E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2 \qquad (\text{自然単位系})
$$

をそのまま使うことを考える。無理にエネルギー E について1次化しない。そのまま使う。そこで $p \to \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ の置き換えを,$E \to i\partial_t$ を加えて共変にとると

$$
p^{\mu} = (E,\vec{p}) \longrightarrow i\partial^{\mu} = (i\partial_t, -i\nabla) \qquad (14)
$$

と書ける。これらを使って *Einstein* の関係式 $E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ を波動方程式の形に表すと

$$
\left[-\partial_t^2 + \nabla^2\right]\psi(\vec{x},t) = m^2\psi(\vec{x},t)
$$

または

$$
(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\psi(\vec{x},t) = (\Box + m^2)\psi(\vec{x},t) = 0
$$

この方程式はクラインーゴードン $(Klein - Gordon)$ 方程式と呼ばれている。

【ＫＧ方程式時間微分の１階化】
２成分波動関数 Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{i}{m}\partial_t\psi\right) \\ \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{i}{m}\partial_t\psi\right) \end{pmatrix}$$

２成分波動関数によるＫＧ方程式を求める。これは時間微分について１階の連立微分方程式となる。

$$\phi = \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{1}{m}\partial_t\psi\right), \qquad \chi = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{1}{m}\partial_t\psi\right), \qquad \psi = \phi + \chi$$

$$\frac{i}{m}\partial_t\psi = \phi - \chi \longrightarrow \imath\partial_t(\phi + \chi) = m(\phi - \chi) \tag{15}$$

$K - G\,eq.$ より

$$\partial_t^2\psi = \frac{m}{i}\partial_t(\phi - \chi) = \nabla^2\psi - m^2\psi \tag{16}$$

(15)，(16) より

$$i\partial_t\phi = -\frac{1}{2m}\nabla^2(\phi + \chi) + m\phi$$
$$i\partial_t\chi = \frac{1}{2m}\nabla^2(\phi + \chi) - m\chi \tag{17}$$

２成分の物理的意味はあとで考える。Ｋ－Ｇ eq は次の平面波の形の解を持つ。

$$\psi(t, \vec{x}) = Nexp[-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})]$$

＜連続の方程式＞

$$\left[\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right]\psi(\vec{x}, t) = 0 \tag{18}$$

式 (18) に左から ψ^* を掛けると

$$\psi^*\partial_t^2\psi - \psi^*\nabla^2\psi + m^2\psi^*\psi = 0$$

また式 (18) の複素共役をとり、それに右から ψ を掛けると

$$\partial_t^2\psi^*\psi - \nabla^2\psi^*\psi + m^2\psi^*\psi = 0$$

両式を差し引くと

$$\psi^*(\partial_t^2\psi) - (\partial_t^2\psi^*)\psi - [\psi^*\nabla^2\psi - (\nabla^2\psi^*)\psi] = 0 \tag{19}$$

ここで

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{i}{2m}(\psi\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) \tag{20}$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = -\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \tag{21}$$

と定義すると、式 (19) の第 1 項は $(2m/i)(\partial\rho/\partial t)$ であり、第 2 項は $(2m/i)\nabla\cdot j$ である。したがって

$$\frac{2m}{i}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}\right) = 0 \tag{22}$$

すなわち、連続の方程式が成り立つ。式 (20)(21) を共変形式で書くと $\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\nabla)$ に留意して

$$j^\mu \equiv \frac{i}{2m}[\psi^*\partial^\mu\psi - \partial^\mu\psi^*\psi] \tag{23}$$

と書ける。式 () は非相対論的な確率の流れと一致する。しかし確率密度 ρ は時間微分を含んでいる。$K-G\quad eq$ は時間微分について 2 階であるから ψ および $\partial_t\psi$ は任意に選べるので ρ が正定値をとるとは限らない。つまり確率が負の値になり得ることを示しているから ρ を確率密度と解釈することはできない。

$K-G\quad eq$ の平面波の解

$$\psi = Nexp[-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})] \longrightarrow \partial_t\psi = -iE\psi$$

その共役量

$$\psi^* = N^*exp[-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})] \longrightarrow \partial_t\psi^* = iE\psi^*$$

これから

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{i}{2m}(\psi\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) \tag{24}$$

$$= \frac{E}{m}|N|^2 \tag{25}$$

ρ の符号は E の符号と同じであるから、負の確率の困難は負のエネルギーの問題と結びついていることが分かる。したがって、$K-G\quad eq$ は、１体問題の相対論的基礎方程式とみなすことができない。

2.5　負エネルギー解の解釈

$K-G\quad eq$ の負のエネルギー解はどのように解釈できるか。非相対論的量子力学の場合のように束縛解を表すのではない。p が大きくなるとエネルギーも負の方向にどんどん大きくなっていくわけだから、遷移のポテンシャルが加わると正エネルギー解も不安定になってどんどん負の解に遷移してしまうことが考えられる。

負のエネルギーを捨てたらどうなるか、そうするとアインシュタインの因果律を破る結果となる。
この深刻な困難を解決するために、$Pali$ と $Weiscopf$ は「負のエネルギー解は反粒子を表す」と大胆な解釈を提案した。
$K-G \quad eq$ は $E=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}=\pm\omega_p$ をもつ２つの独立な解を持つ。それぞれに対して保存する流れの成分は、正エネルギーの場合

$$\rho=\frac{E}{m}\psi^*\psi=\frac{E}{m}|N|^2$$
$$\vec{j}=\frac{\vec{p}}{m}\psi^*\psi=\frac{\vec{p}}{m}|N|^2=\frac{\vec{p}}{E}\rho$$

定数 N は $E>0$ に対して、体積 V あたり１個に規格化することにして

$$\frac{\omega_p}{m}V|N|^2=1$$

とする。
負のエネルギー解 $E=-\omega_p$ では

$$\rho=-\frac{\omega_p}{m}|N|^2=-\frac{1}{V} \quad <0$$
$$\vec{j}=\frac{\vec{p}}{E}=\frac{-\vec{p}}{\omega_p}\rho$$

$Pauli$ と $Weiscopf$ は**「運動量 $-\vec{p}$、エネルギー $-\omega_p$ の負エネルギー解」は「運動量 $\vec{p}$、エネルギー ω_p の反粒子」に対応する**と解釈した ($\leftarrow Dirac$ に先だって同じようなことを考えたのですね)。

反粒子の波動関数は $\psi(t,\vec{x})=Nexp[-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})]$ で $E\longrightarrow -E$、$p\longrightarrow -p$ と置くことになるから、

$$\psi(t,\vec{x})\longrightarrow\psi^{反}(t,\vec{x})=\psi^*(t,\vec{x}) \tag{26}$$

で表されることになる。この変換を**荷電共役変換**（charge conjugation）と呼ぶ。
この変換のもとで流れは

$$\rho^{反}=-\rho=\frac{1}{V}>0$$
$$\vec{j}^{反}=-\vec{j}=\frac{\vec{p}}{\omega_p}\rho^{反}$$

となり、正エネルギー解と同じ形に表すことができる。
＜電磁場中の荷電粒子の運動＞
$K-G \quad eq$ に $\partial^\mu\longrightarrow\partial^\mu+ieA^\mu$ の変換をおこなう。

$$\left[(\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)+m^2\right]\psi(x)=0 \tag{27}$$

この方程式に荷電共役変換をおこなうと

$$\left[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu + -ieA^\mu) + m^2\right]\psi^{反}(x) = 0 \tag{28}$$

となる。これは反粒子が電荷 $-e$ を持つことを示す。j^μ は確率密度と解釈できないが、これに電荷 e を掛けて定義された

$$J^\mu \equiv ej^\mu$$

は電流と解釈することができる。この電流を生み出す電荷分布（$\mu = 0$ の成分）を正エネルギーの部分と負エネルギーの部分に分けると

$$e\rho = e\rho^{(+)} + e\rho(-) = e\rho^{粒} + (-e)\rho^{反}$$

と書ける。これは $+e$ 電荷を持つ粒子と $-e$ 電荷を持つ反粒子の電荷密度の和を表す。連続の方程式 $\partial_\mu J^\mu = 0$ はこの場合、**電荷の保存則**を表し、V を無限に大きくとれば保存する全電荷 Q は

$$Q = \int e\rho(\vec{x})d^3\vec{x} = e\int \rho^{粒}(\vec{x})d^3\vec{x} + (-e)\int \rho^{反}(\vec{x})d^3\vec{x}$$

となる。

電荷の保存則は粒子と反粒子を区別するので、一見負のエネルギーの困難を回避するように思える。つまり、正電荷の粒子が負電荷の反粒子に変化すると電荷の保存則に反するのでそのような遷移は禁止されることになる（負のエネルギー状態へなだれをうって流れ込むということが起こらない）。この限りにおいては成功したと考えられる。しかし、総電荷が保存されるということは、粒子の電荷と反粒子の電荷の和が一定であればよいということで、言いかえると粒子と反粒子の数の差が一定であればよいということになる。高エネルギー系では電磁場中で粒子・反粒子の対生成が発生し、粒子数が保存されない。このような粒子数が保存されない物理系の量子力学は従来の１粒子の状態をシュレーディンガー方程式で記述する量子力学と大きく異なっている。場の量子論ではじめて正しい記述をすることができる。

2.6 自由粒子解の非相対論的極限

運動量 $\vec{p} \ll mc$ の場合（非相対論的極限）

演算子の置き換え,

$$i\partial_t \longrightarrow E, \qquad i\nabla \longrightarrow \vec{p}$$

$$E\phi = \frac{1}{2m}\vec{p}^2(\phi+\chi) + m\phi \tag{29}$$

$$E\chi = -\frac{1}{2m}\vec{p}^2(\phi+\chi) - m\phi \tag{30}$$

$\vec{p}^2 = 0$ ならば $E = \pm m$ の 2 つの解（正負エネルギー解に相当）がある。$E = m$ なら $\chi = 0$。$E = -m$ なら $\phi = 0$。$\vec{p} \neq 0$ なら両者の混合が起こる。この解を求めてみよう。

$$\psi(t, \vec{x}) = Nexp[-i(Et - \vec{p}\vec{x})]$$

式 ()() より

$$\phi - \chi = \frac{m}{E}\psi$$

また

$$\psi = \phi + \chi$$

であるから、この連立方程式を解いて

$$\phi = \frac{m+E}{2m}\psi, \quad \chi = \frac{m-E}{2m}\psi$$

が得られる。整理すると

$$\Psi = \begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}m+E \\ m-E\end{pmatrix} \times \exp(-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x})$$

となる。正エネルギー解

$$E \simeq m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

に対応する解を求めると式 (29) で $\chi = 0$ として $\phi = 1$、式 (30) で $\phi = 1$ とおいて

$$\left(m + \frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\chi = -\frac{1}{2m}\vec{p}^2(1+\chi) - m\chi$$

これから $\chi = \frac{\vec{p}^2}{4m^2}$ が得られる。整理すると対応する解は

$$\Psi = \begin{pmatrix}1 \\ \frac{\vec{p}^2}{4m^2}\end{pmatrix}$$

となる。つまり、非相対論的極限 $\frac{p}{m} \ll 1$ では ϕ 成分が主で χ 成分は $O(p^2/m^2)$ となる。したがって波動関数 Ψ はほぼ 1 成分の ϕ のみで表す近似がよく成り立つ。逆に負エネルギー解では χ 成分が主成分となる。

3　ディラック方程式

3.1　非相対論でのスピンの取り扱い

・角運動量演算子の固有値と固有関数

$$\mathbf{L}|l,m> = l(l+1)l,m> \tag{31}$$

$$L_3|l,m> = m|l,m> \tag{32}$$

$$L_\pm|l,m> = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}|l,m\pm1> \tag{33}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} l & = & 0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},2,\cdots \\ m & = & -l,-l+1,\cdots,l \end{array}\right\}$$

与えられた l に対して, 角運動量の第 3 成分の固有値は $-l \sim l$ までの $2l+1$ 個の値をとり，全体として $2l+1$ 次元の状態ベクトルの空間を作る。
$l=\frac{1}{2}$ の 2 次元空間での基底は

$$L_3\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$L_\pm\left|\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$L_\mp\left|\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

そこで基底を次のように選び,

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

2×2 行列としての L_i を改めて S_i と書くと

$$S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad S_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{34}$$

の形を得る。また，$S_\pm = S_1 \pm iS_2$ とおいて $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, $(i=1,2,3)$ を定義すると，σ_i （パウリ行列）の形は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \sigma_i^2 = \mathbf{I} \tag{35}$$

となる。$\mathbf{I}$ は単位行列。スピン角運動量の交換関係は

$$[\ S_i, S_j\ ] = i\Sigma_k \epsilon_{ijk} S_k$$

また，

$$\vec{S}^2 = \left(\sum_i \frac{1}{2}\sigma_i\right)^2 = \frac{3}{4}\mathbf{I} = S(S+1)\mathbf{I}$$

であるから，スピン角運動量の固有値は常に $S = \frac{1}{2}$ となることがわかる。

＜スピンを持つ粒子の非相対論的ハミルトニアン＞
スピンを持つ粒子の電磁場がある場合の非相対論的ハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \tag{36}$$

ここで g はいわゆる g 因子と呼ばれるものでスピンによる時期能率の大きさを表す。電子の場合近似的に $g = 2$ が成り立っている。$\frac{e}{2m}$ は磁気モーメントの単位を与え，ボーア磁子と呼ばれる。

電子の場合，スピンを持つ粒子の相対論的ハミルトニアンはスピンのない粒子のハミルトニアン（11）に

$$\vec{p} - e\vec{A} \longrightarrow \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) \tag{37}$$

の置き換えを行うことで得られる（←ここは少し天下り的。あとでディラックの考えで方程式を導くが，それまで鵜呑みにしておく）。それを以下にやってみる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi \longrightarrow \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\right]^2 + e\Phi \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})(\vec{\sigma}\cdot\vec{C}) &= (\vec{B}\cdot\vec{C}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \\
\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\times\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) &= \vec{p}\times\vec{p} - e(\vec{p}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{p}) + e^2\vec{A}\times\vec{A} \\
&= -e(\vec{p}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{p}) \\
&= ie\hbar(\nabla\times\vec{A}) = ie\vec{B}
\end{aligned}$$

を使うと

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\right]^2 = \left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - e\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \tag{39}$$

が得られる。これから求めるハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\Phi - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \tag{40}$$

となる。

● P.S ーーーーーーーーーーーーーーーー

$\vec{B}$ および $\vec{C}$ は $\vec{\sigma}$ と互いに交換する 3 つの任意ベクトルとする。

$$
\begin{aligned}
(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})(\vec{\sigma}\cdot\vec{C}) &= \sum_{123}(\vec{\sigma_1}^2 B_1C_1 + \sigma_1\sigma_2 B_1C_2 + \sigma_2\sigma_1 B_2C_1) \\
&= (\vec{B}\cdot\vec{C}) + \sum_{123}\sigma_1\sigma_2(B_1C_2 - B_2C_1) = (\vec{B}\cdot\vec{C}) + i\sum_{123}\sigma_3(B_1C_2 - B_2C_1) \\
&= (\vec{B}\cdot\vec{C}) + i\sum_{123}\sum_{123}\vec{\sigma}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})
\end{aligned}
$$

磁場が z 方向にかかっているとして

$$
\vec{A} = \left(-\frac{B}{2}y,\ -\frac{B}{2}x,\ 0\right)
$$

この条件下で $\vec{A}\times\vec{p}$ を計算すると

$$
\vec{A}\times\vec{p} = (A_2p_3 - A_3p_2, A_3p_1 - A_1p_3, A_1p_2 - A_2p_1) = (0,\ 0,\ -yp_y + xp_x) = 0
$$

となる。x, y, z は対象なので一般的に $\vec{A}\times\vec{p} = 0$ が成り立つ。

【おまけ】(36) のハミルトニアンの展開をやってみる。

いま，z 軸に平行で一様な磁場がかかっているとすると，磁場を $\vec{B}$, ベクトルポテンシャルを $\vec{A}$ とすると，

$$
\vec{B} = \nabla\times A, \quad A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0
$$

$$
B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \\
&= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^2 - e\vec{p}\cdot\vec{A} - e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2\vec{A}^2\right) + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \\
&= \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^2 - e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2\vec{A}^2\right) + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \\
&= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{e}{2m}\frac{B}{2}\left(xp_y - yp_x\right) + \frac{e^2}{2m}\left(\frac{B}{2}\right)^2\left(x^2 + y^2\right) + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \\
&\cong \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\frac{e}{2m}BL_z + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \quad \text{(上式右辺第 3 項の値は一般に小さいので省略)} \\
&= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\frac{e}{2m}\vec{B}\cdot\vec{L} + e\Phi - \frac{g}{2}\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}
\end{aligned}
$$

L_z に比例する項は電子の軌道運動による常磁性を与える。先ほど切り取った $(x^2 + y^2)$ に比例する項は第 2 項対して約 10^{-14} テラス程度となり，外部磁場が強大ではない条件下では無視できる。尚，この項は $<\vec{L}>= 0$ の時に効いてきて反磁性を与えることが知られている（詳しいことは適当な参考書を見てください)。

3.2 ディラック方程式

3.2.1 スピノル表示

電磁場のない場合のディラックの方程式をつくる。(37) を $E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ に適用すると

$$
\begin{aligned}
\vec{p} - e\vec{A} \longrightarrow \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A}\right); \quad \vec{p} \to \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \; (\vec{A} = 0) \\
E^2 - \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}^{\,2}\right) \longrightarrow (EI_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\,(EI_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = m^2 I_2^2
\end{aligned}
\tag{41}
$$

(41) に (14) の置き換え $p^\mu = (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu = (i\partial_t, -i\nabla)$ を行うと,

$$
(iI_2\partial_t - \vec{\sigma} \cdot (-i\nabla))\,(iI_2\partial_t + \vec{\sigma} \cdot (-i\nabla)) = m^2 I_2^2 \tag{42}
$$

左辺は 2 行 2 列のマトリクスの積の形である。(42) を 2 つに分けて波動方程式の形にしていく。(42) を簡単化して $\mathbf{AB} = m^2 I_2^2$ と書く。2 成分波動関数 (スピノル) を $\phi_R,\ \phi_L$ として (I_2 は省略する),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\phi_L &= m\phi' \\
\mathbf{B}\phi_R &= m\phi" \\
\mathbf{AB}\phi_R &= m\mathbf{A}\phi" = m^2\phi_R \to \mathbf{A}\phi" = m\phi_R
\end{aligned}
$$

これから $\phi" = \phi_L,\ \phi_R = \phi'$ となることが分かる。波動方程式を整理すると

$$
\begin{aligned}
(iI_2\partial_t + \vec{\sigma} \cdot (-i\nabla))\,\phi_L &= m\phi_R \\
(iI_2\partial_t - \vec{\sigma} \cdot (-i\nabla))\,\phi_R &= m\phi_L
\end{aligned}
\tag{43}
$$

となる。4 成分のスピノル（ディラックスピノル）

$$
\Psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}
$$

を導入して纏めなおすと

$$
\begin{pmatrix} -m & i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \nabla \\ i\partial_t + i\vec{\sigma} \cdot \nabla & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = 0 \tag{44}
$$

次の 4 行 4 列の γ 行列を導入するともっとすっきり書ける。I_4 を 4 行 4 列の単位行列として

$$
\gamma_s^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma_s} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{45}
$$

$$
\tag{46}
$$

$$
\left[i\left(\gamma_s^0\partial_t + \vec{\gamma_s} \cdot \nabla\right) - mI_4\right]\Psi_s = (i\gamma_s^\mu\partial_\mu - mI_4)\,\Psi_s = 0 \tag{47}
$$

この (47) をスピノル表示 (または Wyle 表示) の**ディラック方程式**と呼んでいる。

【$CoffeeBreak$】―――――――――――

(47) を具体的に書くと

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla - m \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = 0$$

各マトリクスの演算をやると

$$\begin{aligned} (iI_2\partial_t - \vec{\sigma} \cdot \nabla - m)\, \phi_R = 0 \\ (iI_2\partial_t + \vec{\sigma} \cdot \nabla - m)\, \phi_L = 0 \end{aligned}$$

となって，(43) の式と同じ。

◆ $CoffeeBreak$ おしまい ―――――――――――

ディラック方程式は一般に電子などのようにスピン $\frac{1}{2}$ をもつ粒子の波動方程式として使われる。粒子の質量がある場合には (43) により ϕ_R と ϕ_L は質量項を通じて混ざり合うが，粒子の質量が 0 の場合には，2 つの独立な式に分離することができる。2 成分の ϕ_L に対する質量 0 の方程式

$$(i\partial_t - i\vec{\sigma} \cdot \nabla) = 0$$

を**ワイル (Wyle) 方程式**と呼び，ニュートリノなどの波動方程式として用いられることがある。

3.2.2 標準表示

標準表示は波動関数

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_R + \phi_L \\ \phi_R - \phi_L \end{pmatrix}$$

に対する方程式で

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - m & i\vec{\sigma} \cdot \nabla \\ -i\vec{\sigma} \cdot \nabla & -i\partial_t - m \end{pmatrix} \Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - mI_4)\, \Psi = 0 \tag{48}$$

γ は γ_s と同様の 4×4 行列でガンマ行列と呼ばれ，

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

と定義される。
＜両者の使い分け＞
●標準表示：質量が運動量に比べて大きい非相対論的極限で簡単な形となるため，一般に便利に使われる。
●スピノル表示：粒子の質量が小さく，運動量が大きい場合に便利な形。
(→ と言われても今の段階では，”あっそうですか ”というしかない)。
この両者は成分の組換えで同等となるため，本質的な違いは全くないことに注意。これを以下に確認しておく。
(48) を展開すると

$$
\begin{aligned}
\phi_R + \phi_L = \phi_1, \quad \phi_R - \phi_L &= \phi_2 \\
\left(i\partial_t - m\right)\phi_1 + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\phi_2 &= 0 \\
-i\vec{\sigma}\cdot\nabla\phi_1 - \left(i\partial_t + m\right)\phi_2 &= 0
\end{aligned}
$$

上 2 式を足したり，引いたりして

$$
\begin{aligned}
\left(i\partial_t + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi_R &= m\phi_L \\
\left(i\partial_t - i\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi_L &= m\phi_R
\end{aligned}
$$

が得られる。これは (41) と同じ方程式である。【確認終わり】

3.3 ディラック方程式のハミルトニアン

ディラック方程式 (48) の時間発展を記述するハミルトニアンを求める。

$$
\begin{aligned}
\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - mI_4\right)\Psi &= 0 \\
\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - mI_4\right)\Psi &= 0 \\
i\gamma^0\partial_0\Psi &= \left(mI_4 - i\gamma^k\partial_k\right)\Psi \\
i\partial_t\Psi = \gamma^0\left(mI_4 + \vec{\gamma}\cdot\vec{p}\right)\Psi &= \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\right)\Psi
\end{aligned}
\tag{50}
$$

上の式の展開で $(\gamma^0)^2\ \ I_4$ を使った。簡単のため $\vec{p} \equiv (-i\nabla)$ を表すものとする。ディラック行列 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ は

$$
\vec{\alpha} \equiv \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta \equiv \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}
\tag{51}
$$

で定義される。この結果，ディラック方程式のハミルトニアンは

$$
\mathcal{H} = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m
\tag{52}
$$

で与えられることになる（→やっとたどり着いた感じ)。

【$CoffeeBreak$】――――――――――――――-
ここでディラックの考えで（ディラックの有名な教科書に載っている）ディラック方程式を導いてみよう。

■ 相対論的ハミルトン関数

●相対論的古典力学

$$E = m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2{}^{\frac{1}{2}}$$

● 4 元運動量演算子

$$p_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

●波動方程式 $(H\psi = E\psi;\ H \to E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0})$

$$\left\{p_0 - (m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\psi = 0 \tag{53}$$

この波動方程式は，相対論から要求されるエネルギーと運動量との間の関係を考慮している。しかし，相対論的な理論という立場からすれば p_0 が特別扱いされているという点で望ましくない。そこで $\{p_0 + (m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}\}$ を掛けて，相対論的に不変な形にもっていく。

$$\{p_0^2 - m^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\}\psi = 0 \tag{54}$$

この方程式は (53) と同等ではない。(53) の解はすべて (54) の解であるが，逆は正しくない。つまり (54) の解で p_0 の正の値に属するものだけが (53) の解にもなっている。

●量子論の一般的法則からの要求
波動方程式は演算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ あるいは p_0 について１次であること。
そこで， p_0 についてもまた p_1, p_2, p_3 についても有理式で１次となるような形にしてみる。

$$\{p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta\}\psi = 0 \tag{55}$$

ただし，α, β は p に無関係なものとする。また，いまは場[2] を考えていないので，時空内のすべての点は同等である。したがって，波動方程式の中の演算子は x を含んではならない。これらのことから α, β は x にも無関係であり，また，p, x とも互いに交換可能でなければならない（α と β とは何か**電子の内部の運動に属する新しい自由度**を表しているものと考えられる）。[3]

(55) に左から演算子 $\{p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta\ \}$ を掛けると

$$\{p_0^2 - (A + B + C) - \beta^2\}\psi = 0 \tag{56}$$

[2]空間の各点ごとに演算子が定義された無限自由度の量子力学系を場の量子論と呼んでいる。
[3]Dirac 方程式を導く際（ p → σ p ）と置き換えをしたのを覚えていられるだろうか。その根拠は (54) の形を見れば凡そ推定がつくと思う。詳しいことは Dirac の教科書を参照されたい。

ここで A, B, C はそれぞれ

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \alpha_3^2 p_3^2 = \sum_{123} \alpha_1^2 p_1^2 \\
B &= \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 + \alpha_2\alpha_1 p_2 p_1 + \alpha_2\alpha_3 p_2 p_3 + \alpha_3\alpha_2 p_4 p_2 + \alpha_3\alpha_1 p_3 p_1 + \alpha_1\alpha_3 p_1 p_3 \\
&= \sum_{123} (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1) p_1 p_2 \\
C &= (\alpha_1\beta + \beta\alpha_1) p_1 + (\alpha_2\beta + \beta\alpha_2) p_2 + (\alpha_3\beta + \beta\alpha_3) p_3 = \sum_{123} (\alpha_1\beta + \beta\alpha_1) p_1
\end{aligned}$$

であり，$\sum_{123}$ は添え字 $1, 2, 3$ の順序を循環させて和をとることを意味するものとする。この記法を使うと次のように書ける。

$$\{p_0^2 - \sum_{123} [\alpha_1^2 p_1^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_1\beta + \beta\alpha_1) p_1] - \beta^2\}\psi = 0 \tag{57}$$

この式と先ほどの

$$\{p_0^2 - m^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\}\psi = 0$$

を比較すると, α と β が

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0 \\
\beta^2 = m^2, \quad \alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = 0
\end{aligned} \tag{58}$$

およびこれらの式で添え字1,2,3を入れ換えて得られる関係式をみたすなら,(57) は（54）と同じものになる。
α と β を具体的な関係を求めて見よう。$\beta = \alpha_m m$ とおけば ($\leftarrow \alpha_m^2 = 1$),

$$\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a = 2\delta_{ab}, \quad (a, b = 1, 2, 3 \text{ または } m)$$

という関係が得られる。添え字をもった 4 つの α はすべて互いに反交換し，かつ，それぞれの平方は 1 となる。
これで α と β が求められたから,（55）を（54）と同等なものにすることができる。そこで,（55）を "場がない "ときの電子の運動を表す正しい相対論的な方程式であると仮定してもよい。ただし，(55) は（54) 同様，正確に (53) と同等ではなく，正の p_0 の値のほかに負の値の解も許すという問題がある。この問題については別途考えることにして，以下は正のエネルギー解についてだけ考えていくこととする。
ということで**自由粒子の場合の相対論的ハミルトニアン**は次のようになると仮定することができる。

$$H = \alpha \cdot \mathbf{p} + m\beta = -i\hbar\alpha \cdot \nabla + m\beta \tag{59}$$

ここで $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と β は $N \times N$ 行列とする。

＜ハミルトニアンのエルミート性＞

H がエルミートあるためには

$$-i\left\langle a\left|\alpha\cdot\nabla\right|b\right\rangle = -i\sum_{a,b}\int d^3r\psi_a^*\alpha_{ab}\cdot\nabla\phi_b = \sum_{a,b}\int d^3r\phi_a(-i\hbar\alpha_{ab}\cdot\nabla\psi_b)^*$$

部分積分すると

$$\begin{aligned}\sum_{a,b}\int d^3r\phi_a(-i\alpha_{ab}\cdot\nabla\psi_b)^* = \sum_{a,b}\int d^3r\phi_a(i\nabla\psi_b^*\cdot\alpha_{ab}^*) &= \sum_{a,b}\left\{[\phi_a\psi_b^*\alpha_{ab}^*]_{-\infty}^{\infty} - i\int d^3r\psi_b^*\alpha_{ab}^*\cdot\nabla\phi_a\right\} \\ &= -i\sum_{ab}\int d^3r\psi_a^*\alpha_{ba}^*\cdot\nabla\phi_b\end{aligned}$$

$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^* = \left(\alpha^\dagger\right)_{ab}$ となるから α はエルミート行列。

同様に

$$\left\langle a\left|\beta\right|b\right\rangle = \sum_{ab}\int d^3r\phi_a^*\beta_{ab}\phi_b = \sum_{ab}\int d^3r\phi_a(\beta_{ab}\psi_b)^* = \sum_{ab}\int d^3r\psi_a^*\beta_{ba}^*\phi_a$$

$\beta_{ab} = \beta_{ba}^* = \left(\beta^\dagger\right)_{ab}$ となって β もエルミート行列である。

＜行列 α, β の表示を求める＞

行列の次元を N とする。$\alpha_k^2 = \beta^2 = 1$ であるから，エルミート行列 α_k, β の固有値は ±1 となる[4]。

(58) に α_k あるいは β を掛けると

$$\alpha_k^2\beta + \alpha_k\beta\alpha_k = 0, \quad \alpha_k + \beta\alpha_k\beta = 0 \quad (k \text{ についての和はとらない})$$

となる。ここでトレースの性質 $Tr(AB) = Tr(BA)$ を使うと

$$\begin{aligned}Tr(\alpha_k) &= Tr(\beta\alpha_k\beta) = -Tr(\alpha_k\beta\beta) = -Tr(\alpha_k) = 0 \\ Tr(\beta) &= -Tr(\alpha_k\beta\alpha_k) = -Tr(\beta\alpha_k\alpha_k) = -Tr(\beta) = 0\end{aligned}$$

エルミート行列 β は適当なユニタリー行列 U により対角形にできるから[5]。

$$U^{-1}\,\beta\,U = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \qquad b_k = \beta\text{の固有値} = \pm1$$

対角要素が $+1$ の個数を $n_+, -1$ の個数を n_- とすると $(n_+ + n_- = N)$

$$Tr(\beta) = Tr(U^{-1}\beta U) = \sum_k b_k = n_+ - n_- = 0$$

[4] $Ax = \lambda x,\ AAx = x = \lambda Ax,\ Ax = \lambda A^2x = \lambda x,\ \lambda = A$

[5] $U^\dagger AU = A_D$，A_D は対角行列で対角線上に固有値 $\lambda_i \quad (1 = 1, 2, 3\cdots)$ が並んだもの。

となる ($\rightarrow Tr(\beta)=0$)。したがって，$N=2n_+=$ 偶数 になる。最小の N は $N=2$ であるが，これから互いに反交換する 4 個の行列を作ることはできない。[6]。次に小さい N は $N=4$ である。この場合，例えば

$$\alpha=\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

とすると (58) を満たすことができる。σ はパウリ行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で，β は次の行列の省略形である。

$$\beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以上の行列を波動関数に掛けることができるためには，波動関数も 4 つの成分を持たなければならない。

■ 自由電子のディラック方程式

これまでの議論を整理し，自由電子の相対論的方程式（ディラックの方程式）をまとめてみる。
波動関数 ψ を 4 成分で書き

$$\psi(t,x)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi_1(t,x)} \\ \boldsymbol{\psi_2(t,x)} \\ \boldsymbol{\psi_3(t,x)} \\ \boldsymbol{\psi_4(t,x)} \end{pmatrix} \tag{61}$$

とすると，

$$i\frac{\psi}{\partial t}=H\psi, \quad H=\alpha\cdot p+m\beta^2, \quad p=-i\nabla \tag{62}$$

これを満たす 4 個の行列の具体的表現は一義的には決まらないが，通常は (59) の表現が使われる。これをディラック・パウリ表現と呼んでいる。
【$CoffeeBreak$　終わり】———————————————-

[6]任意の 2 行 2 列の行列は 3 個のパウリ行列と 1 個の単位行列の 4 個の行列の線形結合で表すことができる。したがって，反交換する行列を 4 個つくることはできない。反交換するパウリ行列は数は 3 個でしたね！

＜ディラック行列とガンマ行列について＞

ここでディラック行列とガンマ行列を整理しておく。

[**ディラック行列**]

$\alpha,\ \beta$ は次の反交換関係を満たす ((58) 参照)。

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} I_n, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \beta^2 = I_n \quad (i,\ j = 1,2,3) \end{aligned} \tag{63}$$

[**ガンマ行列**]

$$\begin{aligned} \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^0 \vec{\gamma} = \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^0 = \beta \equiv \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{64}$$

(63) より

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = 1$$

(64) より $\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i$ であるので, 上の式を γ^μ で表すと

$$\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 2\delta_{ij}, \quad \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 + (\gamma^0)^2 \gamma^j = 0, \quad (\gamma^0)^2 = 1$$

となる。2 番目の式の右から γ^0 を掛けると $\gamma^i \gamma^0 + \gamma^j \gamma^0 = 0$ となり，γ^j と γ^0 は反交換する。この結果を 1 番目の式に入れると

$$\gamma^i (\gamma^0)^2 \gamma^j + \gamma^j (\gamma^0)^2 \gamma^i = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = -2\delta_{ij}$$

となる。以上を整理すると

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \tag{65}$$

と表せる。$\alpha^i,\ \beta$ はエルミート行列であるので

$$\begin{aligned} \gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \qquad \left(\gamma^0 \gamma^i\right)^\dagger = \gamma^{i\,\dagger} \gamma^{0\dagger} = \gamma^{i\,\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i \qquad (\alpha_i \text{のエルミートを使う}) \\ \gamma^{i\,\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i \longrightarrow \gamma^{i\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \qquad (\ \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 + (\gamma^0)^2 \gamma^j = 0 \text{ を使う}) \end{aligned}$$

γ^i はエルミート行列ではない。$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$ と合わせて $\gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ である。以上, まとめると

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}, \qquad \gamma^{\mu\,\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{66}$$

となる。γ^0 とのを利用して

$$\bar{\gamma}^\mu \equiv \gamma^0 \left(\gamma^i\right)^\dagger \gamma^0$$

を定義すると，$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$ を満たす。また，よく使う行列として

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

を定義する。γ^5 は

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1, \qquad \left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5, \qquad \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$$

を満たす。

[**ガンマ行列の整理（ディラック・パウリ表現）**]

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{67}$$

[**ガンマ行列のトレース**]
γ^μ に対する共変ベクトル γ_μ を

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad \text{つまり} \quad \gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_k = -\gamma^k$$

で定義する。

$$\gamma_0\gamma^0 = \left(\gamma^0\right)^2 = 1, \quad \gamma_i\gamma^i = -\left(\gamma^i\right)^2 = 1 \qquad (i\text{ について和はとらない})$$

であるから，γ_μ は γ^μ の逆行列である。
$\mu \neq (\nu)$ のとき (66) の第１式に γ_ν をかければ $\gamma^\mu = -\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu$ となる (ただし，ν について和はとらない）[7]。γ^μ のトレースをとると

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right) = -\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^\nu\right) = -\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right) = 0, \quad \text{同様に} \quad \mathrm{Tr}\left(\gamma^5\right) = 0$$

となる。また，(66) の第１式のトレースから

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}(1) = 4g^{\mu\nu} \quad (\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)\text{ を利用})$$

である。

[7] $g_{\mu\nu} = 0, (\mu \neq \nu)$

3.4　保存する流れ

<ディラック方程式>

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mI_4\right)\Psi = 0$$

エルミート共役をとると

$$\Psi^{\dagger}\left[-i\left(\gamma^{\mu}\right)^{\dagger}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - mI_4\right] = \Psi^{\dagger}\gamma^{0}\left[-i\bar{\gamma}^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - mI_4\right]\gamma^{0}$$

$\overleftarrow{\partial_{\mu}}$ は微分が左側に作用することを表す。Ψ のエルミート共役を

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}\gamma^{0}$$

と定義すると，$\bar{\Psi}$ に対する運動方程式として

$$\bar{\Psi}\left[-i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - mI_4\right] = 0 \tag{68}$$

を得る。この式の右から Ψ を掛けると

$$\bar{\Psi}\left[-i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} - mI_4\right]\Psi = 0$$

ディラック方程式の左から $\bar{\Psi}$ を掛けると

$$\bar{\Psi}\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mI_4\right]\Psi = 0$$

この 2 式の差をとると

$$\bar{\Psi}\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + \overleftarrow{\partial_{\mu}}\right)\right]\Psi = \partial_{\mu}\left(\bar{\Psi}i\gamma^{\mu}\Psi\right) = 0$$

が得られる[8]。これは

$$\jmath^{\mu} \equiv \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi \tag{69}$$

が連続方程式を満たす流れを与えることを示している。
$Klein - Gordon$ 方程式では連続方程式を満たす流れの時間成分が正定値をとらないため，粒子の確率密度と解釈することができなかった。しかし (69) の時間成分は

$$\rho = j^{0} = \bar{\Psi}\gamma^{0}\Psi = \Psi^{\dagger}\Psi = |\Psi|^{2}$$

は正定値となり，確率密度と解釈することができる。また，j^{μ} の空間成分

$$\vec{j} = \Psi^{\dagger}\vec{\alpha}\Psi$$

は $\vec{\alpha}$ を粒子の速度 $\vec{v}$ と見なせば，粒子の運動による確率の流れを表すことが分かる。これはディラック方程式の大きな成果の一つといえる。

[8] $\bar{\Psi}\overleftarrow{\partial}_{\mu} = \partial_{\mu}\bar{\Psi}$ となることに留意しましょう。

3.5 電磁場中でのディラック方程式

電磁場 $A_\mu(x)$ 中に置かれたスピン $\frac{1}{2}$ を持つ粒子の運動方程式は

$$\partial^\mu \longrightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu + ieA^\mu$$

と置き換えればよかった。この置き換えを minimal substitution とよぶことがある。また，D^μ を共変微分という。そうすると電磁場中でのディラック方程式は

$$(i\gamma^\mu D_\mu - mI_4)\,\Psi = \{i\gamma^\mu\,(\partial_m u + ieA_\mu) - mI_4\}\,\Psi = 0 \tag{70}$$

ハミルトン形式では (71)

$$\mathcal{H} = \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) + \beta m + e\Phi \tag{72}$$

となる。

【$CoffeeBreak$】————————————-

電磁場中の Ψ が連続方程式を満たすことを調べてみよう。電磁場なしの場合と違うやり方でやってみましょう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{1}{i}\left\{\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) + \beta m + e\Phi\right\}\Psi \\ &= -\vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi + \frac{1}{i}\left(e\Phi - e\vec{A} + \beta m\right)\end{aligned}$$

エルミート共役をとると

$$\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t} = -\nabla\Psi^\dagger\cdot\vec{\alpha} - \frac{1}{i}\left(e\Phi - e\vec{A} + \beta m\right)$$

確率密度 $\rho = \Psi^\dagger\Psi$ の時間微分は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi + \Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\left(\nabla\Psi^\dagger\right)\cdot\vec{\alpha}\Psi - \Psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi = -\nabla\cdot\left(\Psi^\dagger\vec{\alpha}\Psi\right)$$

となり，$\vec{j} = \Psi^\dagger\vec{\alpha}\Psi$ とおけば，連続の方程式が得られる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

連続の方程式を共変形式に書き直す。

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0$$

とおくと

$$\rho = \overline{\Psi}\gamma^0\Psi, \qquad \vec{j} = \overline{\Psi}\gamma^0\vec{\alpha}\Psi = \overline{\Psi}\vec{\gamma}\Psi$$

$j^\mu = (\rho, \vec{j})$ は, $j^\mu = \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ であるから，これを使うと連続の方程式は

$$\partial_\mu \mathrm{j}^\mu = 0$$

と共変形式で表せる。j^μ はローレンツ変換に対して反変ベクトルとして変換され，確率保存は任意の慣性系で成り立つことがわかる。

【$CoffeeBreak$　終わり】————————————-

4 ローレンツ共変性

■ **特殊相対性理論**

特殊相対性理論は次の 2 つの公理の上に立てられた理論体系である。

- 物理学の基本法則は，すべての慣性系でその形が変わらない（Einstein の相対性原理）
- すべての慣性系において，光の真空中における速度は，光源の運動状態によらず，すべて相等しい値を持つ（光速度不変の原理）

2 つの慣性系 S(x, y, z, t)，S'(x', y', z', t') を考え，この 2 つの慣性系の原点は $t = 0$ で一致しており，その瞬間の時刻を $t' = 0$ ととる。原点から発せられた光の時刻 t における波面は慣性系 S では

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

と表される（普通 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ とかかれるがここでは自然単位系をつかっているので $c = 1$ としていることに留意)。同じ波面を慣性系 S' で観測すると

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0$$

と表される。これは公理 2 を意味しており，上の 2 つの式より，$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ という関数の値は，慣性系によらず同じ値をとると考えることができる。つまり,2 つの慣性系で

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \tag{73}$$

は不変である。これらの条件を満たす S と S' の間の変換は線形変換となり，この変換はローレンツ変換と呼ばれている。上付きの添え字を使って

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

と書くことにし，これをまとめて x^μ で表す。μ は 0,1,2,3 の値をとる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

を定義すると, 先程の式 (73) は

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{74}$$

となる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \tag{75}$$

ここで Einstein の縮約規則 $A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu$ (第 0 成分は時間成分を表す）を使った。B^μ のような上付き添え字の付いたベクトルを**反変ベクトル**，A_μ のような下付き添え字のついたベクトルを**共変ベクトル**という。(75) を使うと

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

となる。具体的に成分で書くと

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$$

任意の反変ベクトルと共変ベクトルの内積を次式で定義し，これをローレンツ・スカラーという。

$$(A \cdot B) \equiv A^\mu B_\mu = A_\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^i B_i = A^0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

ついでに，微分演算子の反変ベクトル，共変ベクトルを書いておくと

$$\text{反変ベクトル}: \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right)$$

$$\text{共変ベクトル}: \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla \right)$$

■ ローレンツ変換

2 つの慣性系 S(x, y, z, t)，S'(x', y', z', t') を考え，慣性系 S' は S に対して相対速度 v で x 軸方向に等速度運動している場合，

$$t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{76}$$

で表される。これを一般化して

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{77}$$

を考える。$Lambda^\mu{}_\nu$ は 16 個の定数。この変換が (74) を満たすとき，これを**ローレンツ変換**と呼んでいる。(74) より

$$g_{\sigma\rho} x'^\sigma x'^\rho = g_{\sigma\rho} \Lambda^\sigma{}_\mu x^\mu \Lambda^\rho{}_\nu x^\nu = g_{\sigma\rho} \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

となり，これから

$$g_{\sigma\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{78}$$

であることがわかる。この条件式は μ, ν について対称であるから，$\mu = \nu$ の 4 個と $\mu \neq \nu$ の倍意の (16 − 4)/2=6 個の計 10 個の条件式になり，16 個の Λ^{μ}_{ν} のうち独立なものは 6 個となる。
(74) の右辺に $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\sigma\lambda}$ を掛けて

$$g_{\rho\sigma}g^{\sigma\lambda} = \delta^{\lambda}{}_{\rho} \tag{79}$$

を使うと

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{\lambda}{}^{\mu}{}_{}\!=\delta^{\lambda}{}_{\rho} \tag{80}$$

が得られる。ただし，Λ_{μ}^{λ} は

$$\Lambda_{\lambda}{}^{}{}_{\mu}{}^{}\!= g_{\mu\rho}g^{\lambda\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma}$$

で定義され，ローレンツ変換 (77) の逆変換になっている。(77) に Λ_{ν}^{λ} を掛け，(80) を使うと

$$x^{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{}{}_{\mu}x'^{\mu}$$

が得られるが，この式は Λ^{μ}_{ν} の逆行列が Λ_{μ}^{ν} であることを示している。すなわち

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda_{\nu}{}^{}{}_{\mu}$$

共変ベクトルの変換則は

$$\partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\nu}{}^{}{}_{\mu}\partial_{\nu} \tag{81}$$

となる[9]。

さて，ローレンツ変換に対し $\Psi(x)$ が 4 行 4 列の行列 S によって

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x') = S\Psi(x) \tag{82}$$

と変換されたと仮定する[10]。この新しい座標系においてもディラックの方程式が同じ形

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\Psi'(x') = 0 \tag{83}$$

[9] $\partial'_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\mu=1}^{4} \Lambda_{\nu}{}_{\mu}^{}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$

[10] $\Psi'_{\rho}(x') = \sum_{\sigma=1}^{4} S_{\rho\sigma}\Psi_{\sigma}(x)$

で表されるための条件を求めてみよう。逆行列 S^{-1} を左から作用させ，(81) を使うと

$$\begin{aligned} S^{-1}(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\Psi'(x') &= S^{-1}(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu - m)S\Psi(x) \\ &= (iS^{-1}\gamma^\mu S \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu - m)\Psi(x) \end{aligned}$$

が得られる。これを元のディラック方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$ と比較すると

$$S^{-1}\gamma^\mu S \Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \tag{84}$$

であれば，(83) が成り立つ。したがって (84) を満たす S の存在がディラック方程式が共変であるための条件となる。また，(80) を使って (84) を書き換えると

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{85}$$

を満たす S が存在することが共変性の必要十分条件であることが解る。

■ディラック方程式の相対論的不変性

無限小ローレンツ変換は

$$x'^\mu = x^\mu + \sum_{\nu=1}^{4} \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \tag{86}$$

と書かれる。(74) の $\Lambda^\mu{}_\nu$ は

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \tag{87}$$

である。$\epsilon^\mu{}_\nu$ は 1 に比べて十分小さい無限小量である。直交条件 (80) より

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^{4} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\rho &= \sum_{\rho=1}^{4} (\delta^\mu{}_\rho + \epsilon^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\rho + \epsilon^\nu{}_\rho) \\ &= \delta^\mu{}_\nu + (\epsilon^\mu{}_\nu + \epsilon^\nu{}_\mu) + O(\epsilon^2) \\ &= \delta^\mu{}_\nu \end{aligned}$$

ϵ に関する 2 次以降の項を省略して

$$\epsilon^\mu{}_\nu = -\epsilon^\nu{}_\mu$$

を得る。つまり $\epsilon^\mu{}_\nu$ は反対称である。
(86) に対応して S を次の形に仮定し，行列 $T^\mu{}_\nu(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ の形を求めてみる。

$$S = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \epsilon^\mu{}_\nu T^\mu{}_\nu, \quad T^\mu{}_\nu = -T^\nu{}_\mu \tag{88}$$

右辺第 1 項の $\mathbf{1}$ は 4 行 4 列の単位行列であることに注意。$T^{\mu}{}_{\nu}$ を μ, ν に対して反対称としたが，もし対称の部分があっても μ, ν についての足し算でゼロとなるので書く必要がない。この点を具体的にチェックしておくと

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu,\nu=1}^{4} \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} = \epsilon^{1}{}_{1} T^{1}{}_{1} + \epsilon^{1}{}_{2} T^{1}{}_{2} + \epsilon^{1}{}_{3} T^{1}{}_{3} + \epsilon^{1}{}_{4} T^{1}{}_{4} \\
+ \epsilon^{2}{}_{1} T^{2}{}_{1} + \epsilon^{2}{}_{2} T^{2}{}_{2} + \epsilon^{2}{}_{3} T^{2}{}_{3} + \epsilon^{2}{}_{4} T^{2}{}_{4} \\
+ \epsilon^{3}{}_{1} T^{3}{}_{1} + \epsilon^{3}{}_{2} T^{3}{}_{2} + \epsilon^{3}{}_{3} T^{3}{}_{3} + \epsilon^{3}{}_{4} T^{3}{}_{4} \\
+ \epsilon^{4}{}_{1} T^{4}{}_{1} + \epsilon^{4}{}_{2} T^{4}{}_{2} + \epsilon^{4}{}_{3} T^{4}{}_{3} + \epsilon^{4}{}_{4} T^{4}{}_{4}
\end{aligned}
$$

ここで，右辺の対角項は ϵ の反対称（$\epsilon^{\mu}{}_{\mu} = -\epsilon^{\mu}{}_{\mu} = 0$) によりゼロとなる。また，非対角項を取りだすと

$$
\epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu}, \quad \epsilon^{\nu}{}_{\mu} T^{\nu}{}_{\mu}
$$

$T^{\mu}{}_{\nu}$ が対称とすると $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ が反対称なので

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\nu}{}_{\mu} T^{\nu}{}_{\mu} &= \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} - \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり，T の対称部分は足し算で消える。$T^{\mu}{}_{\nu}$ を反対称とすると

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\nu}{}_{\mu} T^{\nu}{}_{\mu} &= \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu} \\
&= 2\epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu}
\end{aligned}
$$

となることは明らかですね。(82) は，従って

$$
\begin{aligned}
\Psi'(x') &= S\Psi(x) \\
&= [\mathbf{1} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \epsilon^{\mu}{}_{\nu} T^{\mu}{}_{\nu}] \Psi(x)
\end{aligned}
$$

と書かれる。さて，(85) の両辺に左から S を掛けると

$$
\gamma^{\mu} S = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} S \gamma^{\nu} \tag{89}
$$

これに (87)(88) を代入すると

$$\gamma^\mu\left(\mathbf{1}+\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma\right)=\sum_{\nu=1}^{4}(\delta^\mu{}_\nu+\epsilon^\mu{}_\nu)\left(\mathbf{1}+\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma\right)\gamma^\nu$$

ϵの 2 次以上の項を省略すると

$$\gamma^\mu+\frac{1}{2}\gamma^\mu\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma=\gamma^\mu+\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma\gamma^\mu+\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{90}$$

整理して

$$\frac{1}{2}\gamma^\mu\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma-\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma\gamma^\mu=\left[\gamma^\mu,\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T^\rho{}_\sigma\epsilon^\rho{}_\sigma\right]=\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{91}$$

ここで右辺は $\epsilon\mu_\nu$ の反対称性を使うと次式のように書くことができる。

$$\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu=\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\epsilon^\rho{}_\sigma(\delta^\rho{}_\mu\gamma^\sigma-\delta^\mu{}_\sigma\gamma^\rho) \tag{92}$$

(92) をチェックしてみよう。馬鹿丁寧にやってみるが初心のうちは労を惜しまないことが大事。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\epsilon^\rho{}_\sigma(\delta^\rho{}_\mu\gamma^\sigma-\delta^\mu{}_\sigma\gamma^\rho)\\
&\quad=\epsilon^1{}_1(\delta^1{}_\mu\gamma^1-\delta^\mu{}_1\gamma^1)+\epsilon^1{}_2(\delta^1{}_\mu\gamma^2-\delta^\mu{}_2\gamma^1)+\epsilon^1{}_3(\delta^1{}_\mu\gamma^3-\delta^\mu{}_3\gamma^1)+\epsilon^1{}_4(\delta^1{}_\mu\gamma^4-\delta^\mu{}_4\gamma^1)\\
&\quad\;+\epsilon^2{}_1(\delta^2{}_\mu\gamma^1-\delta^\mu{}_1\gamma^2)+\epsilon^2{}_2(\delta^2{}_\mu\gamma^2-\delta^\mu{}_2\gamma^2)+\epsilon^2{}_3(\delta^2{}_\mu\gamma^3-\delta^\mu{}_3\gamma^2)+\epsilon^2{}_4(\delta^2{}_\mu\gamma^4-\delta^\mu{}_4\gamma^2)\\
&\quad\;+\epsilon^3{}_1(\delta^3{}_\mu\gamma^1-\delta^\mu{}_1\gamma^3)+\epsilon^3{}_2(\delta^3{}_\mu\gamma^2-\delta^\mu{}_2\gamma^3)+\epsilon^3{}_3(\delta^3{}_\mu\gamma^3-\delta^\mu{}_3\gamma^3)+\epsilon^3{}_4(\delta^3{}_\mu\gamma^4-\delta^\mu{}_4\gamma^3)\\
&\quad\;+\epsilon^4{}_1(\delta^4{}_\mu\gamma^1-\delta^\mu{}_1\gamma^4)+\epsilon^4{}_2(\delta^4{}_\mu\gamma^2-\delta^\mu{}_2\gamma^4)+\epsilon^4{}_3(\delta^4{}_\mu\gamma^3-\delta^\mu{}_3\gamma^4)+\epsilon^4{}_4(\delta^4{}_\mu\gamma^4-\delta^\mu{}_4\gamma^4)
\end{aligned}$$

ここで $\mu=1{,}2{,}3{,}4$ の場合を上の式に代入して計算を続けると

$$\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\epsilon^\rho{}_\sigma(\delta^\rho{}_\mu\gamma^\sigma-\delta^\mu{}_\sigma\gamma^\rho)\longrightarrow 2\left(\epsilon^1{}_1\gamma^1+\epsilon^1{}_2\gamma^2+\epsilon^1{}_3\gamma^3+\epsilon^1{}_4\gamma^4\right)=2\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon\mu_\nu\gamma^\nu \qquad (\mu=1)$$

$$2\left(\epsilon^2{}_1\gamma^1+\epsilon^2{}_2\gamma^2+\epsilon^2{}_3\gamma^3+\epsilon^2{}_4\gamma^4\right)=2\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon\mu_\nu\gamma^\nu \qquad (\mu=2)$$

$$2\left(\epsilon^3{}_1\gamma^1+\epsilon^3{}_2\gamma^2+\epsilon^3{}_3\gamma^3+\epsilon^3{}_4\gamma^4\right)=2\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon\mu_\nu\gamma^\nu \qquad (\mu=3)$$

$$2\left(\epsilon^4{}_1\gamma^1+\epsilon^4{}_2\gamma^2+\epsilon^4{}_3\gamma^3+\epsilon^4{}_4\gamma^4\right)=2\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon\mu_\nu\gamma^\nu \qquad (\mu=4)$$

(91) に (92) を代入し，ϵ^{ρ}_{σ} の反対称化された係数を等しいとおくと

$$[\gamma^{\mu}, T^{\rho}_{\sigma}] \equiv \gamma^{\mu} T^{\rho}{}_{\sigma} - T^{\rho}{}_{\sigma}\gamma^{\mu} = \delta^{\rho}{}_{\mu}\gamma^{\sigma} - \delta^{\sigma}{}_{\mu}\gamma^{\rho} \qquad (\mu, \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{93}$$

となる。そこで T^{ρ}_{σ} として

$$T^{\rho}{}_{\sigma} = \frac{1}{4}(\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}) \tag{94}$$

とおけば，(93) を満たすことがわかるが，ついでにこれもチェックしておこう。γ 行列の交換関係 (65)

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\delta^{\mu}{}_{\nu}$$

を使って (93) を整理すると

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu} T^{\rho}{}_{\sigma} - T^{\rho}{}_{\sigma}\gamma^{\mu} &= \frac{1}{2}\gamma^{\mu}(\delta^{\rho}{}_{\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}) - \frac{1}{2}(\delta^{\rho}{}_{\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho})\gamma^{\mu} \\
&= \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\delta^{\rho}{}_{\sigma} - \delta^{\rho}{}_{\sigma}\gamma^{\mu}) - \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}(2\delta^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\rho} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\sigma}(2\delta^{\rho}{}_{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}) \\
&= \delta^{\rho}{}_{\mu}\gamma^{\sigma} - \delta^{\sigma}{}_{\mu}\gamma^{\rho}
\end{aligned}$$

以上の計算で無限小ローレンツ変換に対して, 変換行列 S の存在を確認することができたし，その具体的な形も求めた。つまり無限小ローレンツ変換でディラックの方程式は不変であることが証明できたということになる。有限のローレンツ変換は無限小ローレンツ変換の積み重ねで実現されるから，有限のローレンツ変換についてもディラックの方程式は不変であるということになる。

【独白】ふ〜，すこしごてごてした計算が続いたので疲れた。この辺はテキストを眺めるだけで読み飛ばし, 先を急がれる方も多い思うが，面倒でも一度自分の手で計算して，確かめておくことも大事ですね。。。チョッと TeaTime でもするか

4.1 非相対論的スピンの空間回転における変換

■空間回転と角運動量

ここで無限小回転について復習しておこう（『解析力学ノート』の「正準変換と無限小回転」の項も参照されたい）。座標軸を固定された単位ベクトル $\vec{e}$（回転軸）の回りに $\delta\theta$ の無限小回転を考える。無限小回転した座標系をダッシュで区別する，

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r} \times \vec{e}\delta\theta$$

となる関係にある。

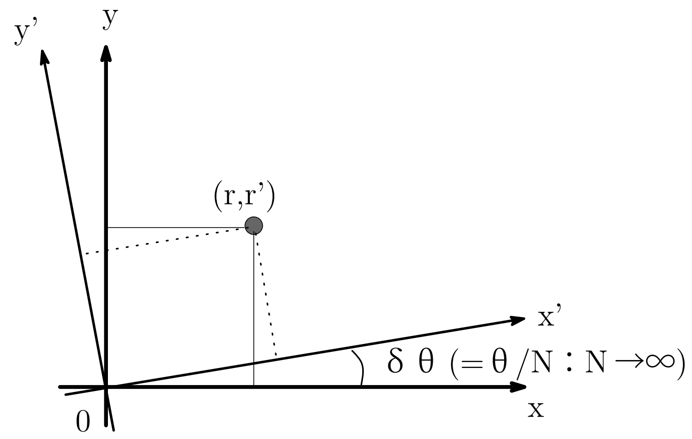

図 1: 無限小回転

もとの座標系での波動関数を ψ とし，無限小回転座標変換後の波動関数は

$$\psi(\vec{r}\,') = \psi(\vec{r} + \vec{r} \times \vec{e}\delta\theta)$$

これをテイラー展開すると，ベクトル３重積の公式 $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$ を利用して

$$\begin{aligned}\psi\,'(\vec{r}) &= \psi(\vec{r} + \vec{r} \times \vec{e}\delta\theta) \simeq \psi(\vec{r}) + \delta\theta\, \vec{r} \times \vec{e} \cdot \nabla\psi(\vec{r}) \\ &= (1 - \delta\theta\, \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \nabla))\psi(\vec{r}) \\ &= (1 - i\delta\theta\, \vec{e} \cdot \vec{L})\psi(\vec{r})\end{aligned}$$

となる。ここで，軌道角運動量演算子 $L = \vec{r} \times \vec{p}$ が現れたことに注目しよう。つまり，無限小回転を表す演算子 $R_{\delta\theta}$ は

$$R_{\delta\theta} = 1 - i\delta\theta\vec{e} \cdot \vec{L} \tag{95}$$

であることがわかる。ついでにこの演算子はユニタリー演算子であることを証明しておく。演算子 (95) の共役をとると $R^\dagger_{\delta\theta} = 1 + i\delta\theta\vec{e} \cdot \vec{L}^\dagger$ となる。L はエルミート演算子であるから $L^\dagger = L$。これから

$$R_{\delta\theta}R^\dagger_{\delta\theta} = R^\dagger_{\delta\theta}R_{\delta\theta} = 1$$

となり（2 次以上の無限小は無視），$R_{\delta\theta}$ はユニタリー演算子であることがわかる[11]。次に，有限の回転を考えると，これは無限小回転の積み重ねで得られるか

[11]無限小変換 $R_{\delta\theta}$ に対してハミルトニアンは $H' = R_{\delta\theta} H\, R^{-1}_{\delta\theta} = H + i[H, \delta\theta\vec{e} \cdot \vec{L}] + O(\delta\theta^2)$ と変換される。これから無限小回転でハミルトニアンが不変 (H'=H) ということと，その回転軸方向の角運動量成分 $\vec{e} \cdot \vec{L}$ とハミルトニアンが交換するということが同じであることがわかる。

ら，$\vec{e}$ 軸まわりに角 θ だけの有限な回転に対しては

$$R_\theta = \lim_{N\to\infty}\left[1 - i\left(\frac{\theta}{N}\right)\vec{e}\cdot\vec{L}\right]^N$$
$$= exp(-i\theta\vec{e}\cdot\vec{L})$$

となる。以上の議論はスピン角運動量についてもまったく同様に成立する[12]。

■非相対論的スピンの空間回転における変換

テキストに戻ろう。簡単のためにパウリスピノルの z 軸まわりの θ 回転を考えてみよう。

$$\chi = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \to z\text{ 軸回りで}\theta\text{回転} \to \chi' = \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \Lambda\chi$$

無限小回転 $|\theta| \ll 1$ に対しては空間回転と角運動量のところで議論したようにスピン演算子

$$S_z = \frac{\sigma_z}{2}$$

を用いて

$$\chi' \simeq (1 + i\theta S_z)\chi$$

と表される[13]。これは無限小変換を用いたスピン演算子の定義であることも上に述べた通り。θ が有限の場合には

$$\chi' = \Lambda\chi = e^{i\theta S_z}\chi$$

で表される。さらに 一般の回転の場合には

$$\Lambda = e^{\frac{\theta_i}{2}\sigma_i}, \qquad \text{（ただし } i = 1,2,3 \text{ の和をとる）} \tag{96}$$

で与えられることも上で見てきたとおりである。

■ディラックスピノルの空間回転変換

ディラック方程式の自由粒子の解は、粒子が静止している座標系では

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$$

---

[12]詳しいことは J.J.Sakurai「現代の量子力学 (上)」，高橋康「量子場を学ぶための場の解析力学入門」あるいはこのサイトの CoffeeBreak「座標変換とスピノール」の小稿を参照されたい。

[13]注意すべきはスピノールを回転させているという点。従って先ほどの座標回転を逆回転することに相当するから先ほどの議論の回転角 θ を $-\theta$ と置いたことに注意されたい。

の上成分 ϕ のみで表され、ϕ の 2 成分は静止系でのスピンの上下を表す成分と解釈することができる。従って、静止系での空間回転のもとでは、ϕ はパウリの 2 成分スピノルと同様に変換されることが予想される。そこで、非相対論の際に使ったスピン演算子 $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を拡張してディラックスピノルに対する 4 行 4 列のスピン演算子 $\boldsymbol{\Sigma}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ を次のように定義しよう。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3 \\
\frac{1}{2}\Sigma_2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1 \\
\frac{1}{2}\Sigma_3 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2
\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

右辺の展開は（67）とパウリ行列の性質 $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \cdots$ を使うと

$$\begin{aligned}
i\gamma^1\gamma^2 &= i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\
i\gamma^2\gamma^3 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad i\gamma^3\gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

スピン演算子 $\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$\Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_2\Sigma_1 = i\Sigma_3,\ \Sigma_2\Sigma_3 - \Sigma_3\Sigma_2 = i\Sigma_1,\ \Sigma_3\Sigma_1 - \Sigma_1\Sigma_3 = i\Sigma_2$$

と $\boldsymbol{\sigma}$ と同じ交換関係を満たす[14]。

i 軸まわりの回転 θ を表す演算子として（96）を使って

$$\Lambda_{Ri} = e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma_i} = cos\frac{\theta}{2} + isin\frac{\theta}{2}\Sigma_i \tag{98}$$

を考える。（98）の右辺は次の展開式から導かれる。

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\theta}{2}\Sigma_i} &= cos\frac{\theta}{2}\Sigma_i + isin\frac{\theta}{2}\Sigma_i \\
cos\frac{\theta}{2}\Sigma_i &= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\Sigma_i\right)^2 + \cdots = cos\frac{\theta}{2} \quad (\because \Sigma_i^2 = \mathbf{1})
\end{aligned}$$

この逆変換は $\theta \to -\theta$ とすることで

$$\Lambda_{Ri}^{-1} = e^{-i\frac{\theta}{2}\Sigma_i}$$

[14]つまり $\boldsymbol{\Sigma}$ はスピンを記述するということですな。ここでは先にスピン演算子といってしまっているが（笑い）。

で与えられる。この回転演算子 Λ_{Ri} が（84）を満たすことを示す[15]。例によって $i=1$ 軸まわりの無限小回転を考える。回転演算子は

$$\Lambda_{R1} \simeq 1 + i\frac{\theta}{2}\Sigma_1$$

となる。これに対して γ^μ は

$$\Lambda_{R1}{}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{R1} \simeq \left(1 - i\frac{\theta}{2}\Sigma_1\right)\gamma^\mu\left(1 + i\frac{\theta}{2}\Sigma_1\right) \simeq \gamma^\mu + i\frac{\theta}{2}[\gamma^\mu, \Sigma_1]$$

の変換を受ける。右辺の交換関係は

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0, \Sigma_1\right] &= i\left[\gamma^0, \gamma^2\gamma^3\right] = i(\gamma^0\gamma^2\gamma^3 - \gamma^2\gamma^3\gamma^1) = 0 \\
\left[\gamma^1, \Sigma_1\right] &= \gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^2\gamma^3\gamma^1 = 0 \\
\left[\gamma^2, \Sigma_1\right] &= i\left[\gamma^2, \gamma^2\gamma^3\right] = i(\gamma^2\gamma^2\gamma^3 - \gamma^2\gamma^3\gamma^2) = -2i\gamma^3 \\
\left[\gamma^3, \Sigma_1\right] &= i\left[\gamma^3, \gamma^2\gamma^3\right] = i(\gamma^3\gamma^2\gamma^3 - \gamma^2\gamma^3\gamma^3) = 2i\gamma^2
\end{aligned}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{R1}^{-1}\gamma^0\Lambda_{R1} = \gamma^0 \\
&\Lambda_{R1}^{-1}\gamma^1\Lambda_{R1} = \gamma^1 \\
&\Lambda_{R1}^{-1}\gamma^2\Lambda_{R1} = \gamma^2 + \theta\gamma^3 \rightarrow (\text{有限回転}) cos\theta\gamma^2 + sin\theta\gamma^3 \\
&\Lambda_{R1}^{-1}\gamma^3\Lambda_{R1} = \gamma^3 - \theta\gamma^2 \rightarrow (\text{有限回転}) cos\theta\gamma^3 - sin\theta\gamma^2
\end{aligned}$$

となる。この結果は x^1 軸の周りの空間回転に対する（85）式の結果に一致する[16]。結論として、スピン演算子を（97）で定義すると、ディラック方程式は空間回転に対して共変になっていることが示された。(97) は一般に次のように定義しておけば便利である。

$$\Sigma_i = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k$$

[15]記号が変わってるが適時読み取っていただきたい（笑い）。

[16]とテキストではなっているが、よく分からん！だいぶん頑張ったが、、、ここはそうだとして先に進むこととする。