

ルベーク積分への遙かなる道程 (1)

H E N L O U

2006 年 x 月 xx 日

目次

第 I 部	ルベーク積分への準備	3
1	数の連続性	4
1.1	有理数と無理数	4
1.2	デデキントの切断と実数の連続性	5
1.2.1	デデキントの切断	5
1.2.2	実数の連続性	7
2	集合	8
2.1	集合の表し方	8
2.2	集合の演算	9
2.2.1	交換律・結合律・分配律について	12
2.3	直積集合	13
3	写像	15
3.1	写像の定義	15
3.2	単射・全射・全単射	17
3.3	逆像と逆写像	18
3.4	添え字付けられた集合族	20
3.5	写像のグラフ	23
3.6	集合算と写像の関係	23
3.7	有限集合の要素の個数を比較する	24
4	無限集合	25
4.1	有理数と実数の濃度	25
4.1.1	有理数の濃度	25
4.1.2	実数の濃度	27
4.2	無限の濃度	28
4.3	無限集合の比較	28
4.3.1	ベルンシュタイン定理の応用	29
4.4	濃度の演算と無限大の演算規則	29
4.4.1	濃度の演算	29

4.4.2	無限大の演算規則	29
5	点集合と位相	30
5.1	距離空間	30
5.2	位相空間としての数直線	32
5.2.1	近傍と開集合・閉集合	32
5.2.2	有界集合の上限・下限	39
5.3	コンパクト性	40
5.3.1	開被覆	41
5.3.2	コンパクト	43
5.3.3	ハイネ・ボレルの被覆定理	46
6	関数の連続性	47
6.1	連続ということ - イプシロン - デルタ方式	47
6.2	連続ということ - 近傍を使った連続の定義	48
7	連続写像と開集合	50

第I部

ルベーク積分への準備

これからルベーク積分の勉強を進めるわけですが、なんの装備も持たず、一切の準備運動もやらずに、いきなりルベーク連峰の登坂を目指すすと、足腰がすぐ痛くなるわ、汗はボンボン噴出すわ、しまいには一步も先へ行くことができない、なんとも悔しい思いと準備不足の後悔の念に苛まれ、即、挫折の憂き目を見るのは明白なことですね。かくいう私は、いく度挫折したことが。。ま、それにも懲りずに今回ルベーク積分の勉強に再び取り組むわけですが、今までの貴重な経験を生かして、できるだけ準備運動をしておこう、装備も基本的なものは用意しておこう、ということで、本レポートは二部構成とし、第一部は準備編、第二部は本論編というスタイルにしました。準備不要の猛者の方はいきなり第二部に行かれるのもよいかと思います。

大学2回生の頃、ルベーク積分の講義を聞きました。テキストは伊藤清三著「ルベーク積分入門」(裳華房)でした。大学に入って「詳解・微積分演習」(今でもありますね)で微積の計算問題をいろいろこなし、それなりに積分計算に自信をもつまでになっていました。自分が慣れ親しんできた積分を先生は講義で「そのような積分を Riemann 積分といいます」言われた。ハッ、リーマン積分、なかなか高級なネーミングだ、と妙に自尊心をかきたてられたことを憶えています。ここまではよかった。いざ、ルベーク積分の話に入ると、積分計算の技術的な話はまったくでてこない。集合論の話が延々と続き、ジョルダン測度やルベーク測度云々と聞きなれない言葉がポンポンでてくる。また、やたらと花文字がでてくる。なんでこんな小洒落れた文字をわざわざ使うのか、目に悪いではないか。。。とだんだんむかつ腹が立ってくる。くだんの新進気鋭の若き数学科の先生は、楽しそうにニコニコしながら講義を進められている。なんと、こんな話のどこが楽しいの？ 一体なんの役に立つの？ と“利”にばかり気が走っていた若きわたしは、こんな講義に時間をとられるのはご勘弁いただきたい、それより自分でほかの勉強をしたほうがよい、という生意気な気持ちがムクムクと沸き上がり、また、聴いていてもサッパリ分からないので、早々に講義から足を洗いました(笑)。暫くして専門課程に入り、いろいろ物理・化学の専門書なんかを見ていると、時々、ルベーク積分という言葉の本の中に見ついたり、ルベーク積分の意味で解釈しないと云々というフレーズに出合ったりすると、やはりルベーク積分は勉強しないといかんあと思ったり、また、別のところで、ルベーク積分は積分の数学的保証を与えてくれるだけで、積分の技術的なことは Riemann 積分でよい、というような記述に出会うと、なんだそれなら特にルベークなんか知らなくていいんだと溜飲を下げたり、と、ま、ルベーク積分は私の意識のどこかに潜んで、時々忘れた頃に顔をだすということを以来ずっと繰り返し続けていました。ということで、本稿はこのような私がルベーク積分をできるだけ正面に見据え、はるかに聳え立つ山峰に果敢且つポツポツとクライムを試みた記録であります。無論、頂上に立つという無謀な気持ちは一切ありませんし、また、そこまでやる必要も感じません。ともかく、何より、そんな能力はまったくありませんから、物理に役立つ程度のルベーク積分の理解を目指すことを目的としています。ということで、果たしてこの拙稿がどれだけ役立つものかサッパリ分かりませんが、縁あって本稿を読まれた方で、誤り、おかしな議論等を見つけられたら、気軽にご一報いただきたい。さて、前置きはこれぐらいにして、そろそろ参りましょうか。

ハ～イ！これから長丁場になりそうだけど、よろしく願いますわね。

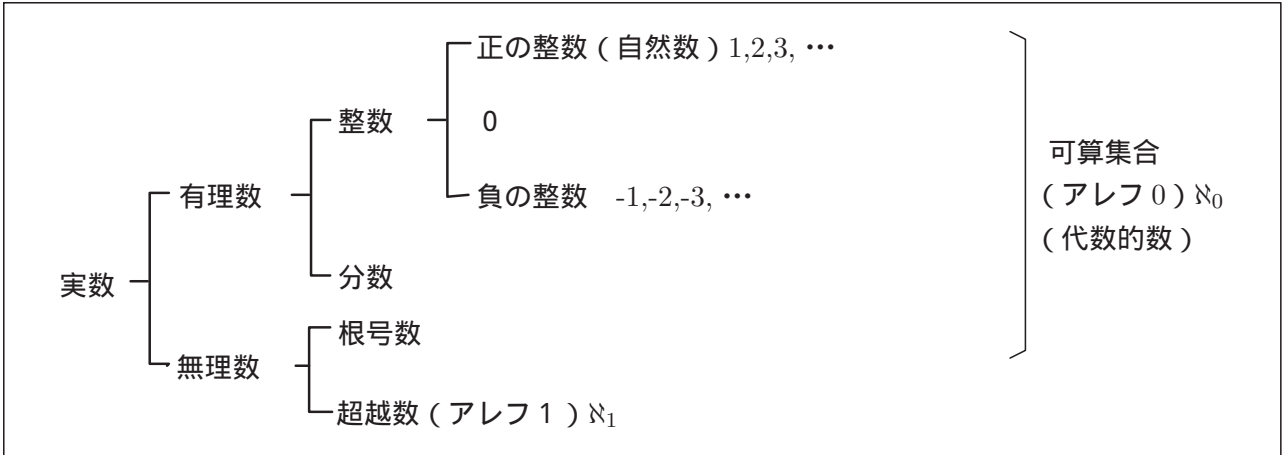
オッ、キャサリン！いつの間に来ていたの。これから長い道のりが続くと思うけどキャサリンが同伴なら心強いね。皐月の風も心地よい風となるわけだ。君がいろいろ疑問をぶつけてくれると僕も理解が深まるから楽しみだ。さあ、定刻になったというわけじゃないけど、そろそろ出発しようか。。

LET'S GO!

1 数の連続性

1.1 有理数と無理数

実数と呼ばれている数を分類すると次のように分けられる。



実数の中で 0 および $\pm \frac{n}{m}$ (n, m は自然数) と分数の形に表されるものを有理数と呼び、それ以外の実数、つまり、分数の形で表すことができない数を無理数¹と呼んでいます。 $\sqrt{2}$ や自然対数の底 e 、円周率 π などは無理数とされています。有理数を十進法で表すと、数字は有限か、あるいは無限ならば循環小数になるという特長があるのに対して無理数を少数で表すと循環しない小数となります。循環小数²の表し方は、循環する少数の部分の数字の上に・を打って表します。

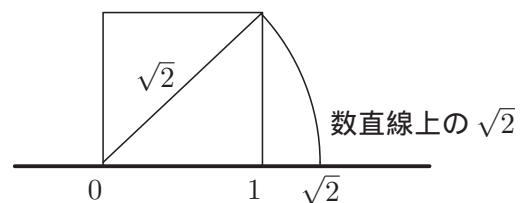
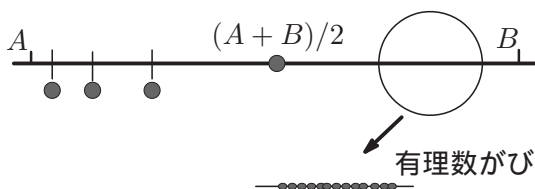
$$1/7 = 0.142857142857142857 \dots = 0.\dot{1}42857$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

さて、ある数直線を考え、線分 AB 内に有理数が一体何個並んでいるのか調べてみましょう。2つの有理数の中間には必ず他の有理数が存在しますね。ということは、線分 AB 内には有理数が万遍なく無限にぎっしりと詰まっていることが分かります。このことを有理数の稠密性と呼んでいます。有理数は数直線上のどんな狭い間隔にでも存在していることが分かりましたが、数直線上には無理数というものがありますから、結局、無理数の穴が無数に空いていることになります。

2つの有理点 A, B の間には有理点 $(A+B)/2$ が存在する。

この操作を繰り返せば任意の2つの有理点の間には無限に多くの有理点が存在することが分かる。



¹有理数を係数とする代数方程式の根を代数的数という。そのうち、特に無理数となるものを代数的無理数という。また、代数方程式の根とならない数を超越数という。 π と e は超越数である。超越数は π と e の他に自然数と 1:1 の対応がつかないほど多く存在していることが知られている。これを \aleph_1 の濃度という。← この意味は後で明らかになります。

²循環する数字を循環節といいます。

$\sqrt{2}$ は無理数であることの証明

$\sqrt{2}$ を有理数と仮定すると m/n の既約分数で表せる。 $\sqrt{2} = m/n$ 両辺を2乗すると $2 = m^2/n^2$. さらに変形して $2n^2 = m^2$ となる。左辺は偶数なので右辺 m^2 も偶数となり, m, n の間には2という公約数を持つことになり、矛盾が生じる。これは $\sqrt{2}$ が有理数と仮定したことが原因である。

無理数は無限に存在することの証明

自然数 n に対して $\sqrt{2} + n$ は無理数である。なぜなら, 仮にこれが有理数とすると $\sqrt{2} + n = p/q$ p, q は整数と分数の形に表されるはずである。そうすると $\sqrt{2} = p/q - n = (p - qn)/n$ となり, $\sqrt{2}$ も有理数になってしまう。これは $\sqrt{2} + n$ は無理数であるということと矛盾する。したがって, $\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 2, \dots$ はすべて無理数であり, 無限に存在することがわかる。

- キャサリン：無理数というのは有理数と違って有限の分数として表すのは無理というところからその名前がきているのね。それはいいんだけど、線分 AB 内に有理数がぎっしり詰まっているが、実はスカスカで無数の無理数の穴が空いているというのはいますぐさまイメージしにくいものね。
- K氏：そうだね、最初は大抵ここで躓く(笑い)。今、簡単のために0と1の区間を考えよう。この区間を仮に2等分するとその分点として $1/2$ が得られる。4等分すると $1/4, 2/4, 3/4$, 同様に8等分, 16等分... どんどん分割して分点を増やしていくと分点の間隔は0に近づいていくよね。この操作を無限回した結果というのは、残念ながら現実には見届けられないけど(これが最後だと思ってもまだ先がある), イメージとして0と1の区間は分点である有理数でビッシリ詰まってくるよね。しかし, そうだとしても $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ のような無理数はどの分点をチェックしても見当たらない。つまり, 有理数では埋められない穴があるということになる。つまり, 無理数はこの穴を埋めるパテのようなものと捉えることができる。後ほど話がでてくるけど, 有理数は自然数と対応付けて数を数えることができるけど(可付番無限個), 無理数は対応付けができない程無限(連続無限個)にあるんだ。だから, 有理数のビッシリ具合は無理数に比べてスカスカということになるんだね。話は飛ぶけれど, α が任意の $\epsilon > 0$ に対して不等式 $|\alpha - p/q| < \epsilon/q$ を成立させる有理数解 p/q を持つとき, α は無理数であるといわれる。つまり無理数は有理数列の極限ということだね。

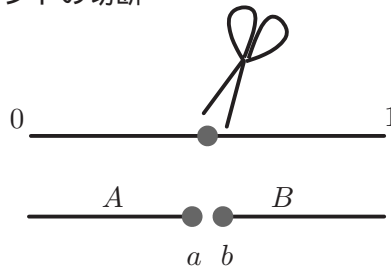
1.2 デデキントの切断と実数の連続性

1.2.1 デデキントの切断

数直線を無限に延びた糸と考えて, その糸をハサミでちょきんと切断すると当然糸は2つに分かれます。このとき糸の切り口はどうなっているでしょうか, というのがデデキント³の切断公理と呼ばれるものです。

デデキントの切断

$(A|B)$



³Juliu Wilhelm Richard Dedekind(1831 - 1916), ドイツの数学者

《デデキントの切断》

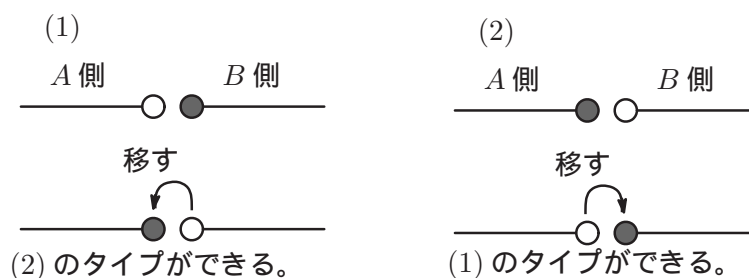
有理数全体の集合を Q とします。有理数相互には大小の関係がありますから、有理数全体を上組と下組に分けることができます。上組に入っている有理数は下組に入っているどの有理数よりも大きいようにします。さて、 Q を次の条件を満たす空でない2つの部分集合 A (下組) と B (上組) に分け、これを $(A|B)$ という記号で表しましょう。部分集合の組 (A, B) が次の条件を満たすとき、これを有理数の切断といいます。

- (1) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = Q, A \cap B = \emptyset$
- (2) $a \in A, b \in B$ ならば常に $a < b$ が成り立つ。

デデキントの切断の意味するところを具体的に見ていきましょう。いま、仮に0から1までの数直線を切断したとします。すると両端の切り口には、下組に一番大きな有理数 a と上組の一番小さな有理数 b が現れると考えたいですが、そうすると、有理数の稠密性により切り口 a と b の間には $\frac{a+b}{2}$ という有理数が存在することになり、この数は b より小さく a より大きいから下組にも上組にも入りらず、これは有理数を上下2組に分けたことになりません。つまり、このようなケースは存在しないということになります。ということで、有理数の切断には次の3つのパターンが考えられます。

- (1) A に最大数がなく、 B に最小数がある。
- (2) A に最大数があり、 B に最小数がない。
- (3) A に最大数がなく、 B に最小数がない。

(1) と (2) には互換性があります。つまり、(1) の B の最小数を A に入れば、その数は A は最大数となりますし、(2) の A の最大数を B に入れば、その数は B の最小数となります。したがって、(1) と (2) のパターンは本質的に同じということになりますので、有理数の切断は (1) または (3) のパターンのいずれかであると考えことにします。

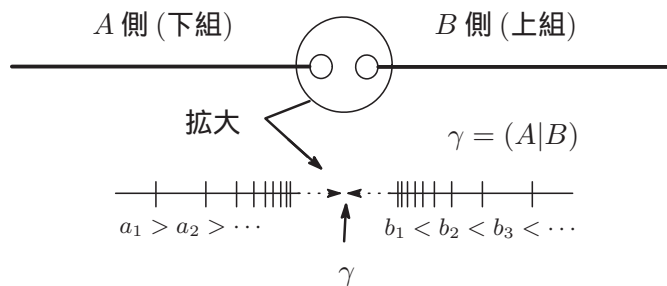


さて、有理数の切断 (1) のタイプは、1つの有理数 a に対し、 a 以上の数を上組に、それ以外に数を下組にすると考えれば、有理数 a とタイプ (1) の切断は1対1に対応することになります。つまり、有理数 a は切断 $(A|B)$ によって定義されるとし、 $a = (A|B)$ で表わします。次に (3) のパターンですが、切断 $(A|B)$ は1つの無理数 γ を定義するとし、 $\gamma = (A|B)$ で表わします。これがデデキントの無理数の定義です。

- キャサリン：う～ん、(1) のパターンは有理数の定義として納得できるけど、(3) のパターンが無理数の定義だといわれてもすぐにはピンとこないわね。というのは、有理数の場合は最大にしる

最小にしる数値があったじゃない。パターン (3) の場合はそういう意味で数値というものがみえないもの。確かにピッシリ並んだ有理数の隙間を切断しているのだから無理数がでてくるのかなとは思われるけど。。。

- K氏: そうだね。確かにイメージとしては掴みにくいよね。そこで、今その切断面を見てみよう。下組から見れば有理数の最大値がないのだから、 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ というようにいくらでも大きくなる有理数列が取れる。一方、上組から見れば有理数の最小値がないのだから、 $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$ とどんどん小さくなる有理数列が取れる。これらのことから、無理数は有理数列の行き着く果て、つまり有理数列 a_1, a_2, \dots , または b_1, b_2, \dots の極限と捉えることができる。これがデデキントの無理数の定義というわけなんだ。
- キャサリン: なるほど、先ほどKさんが有理数の稠密性のところで言っていたように、無理数を有理数列の極限として捉えるわけね。デデキントの切断でよく分かったわ。



このように定義された有理数と無理数を総称して実数といいます。有理数の隙間を無理数と考えていましたから、その隙間に無理数を入れてしまえば、実数の世界には隙間はなくなってしまいます。これが実数の連続性といわれるものです。

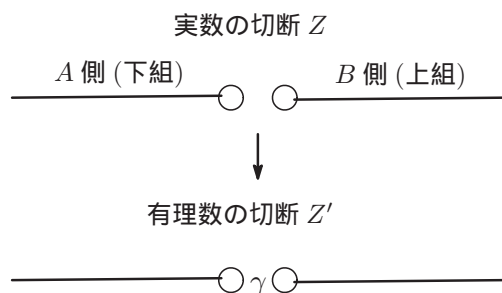
1.2.2 実数の連続性

実数の切断を考えてみましょう。実数を切断すれば下組か上組に必ず有理数か無理数が顔をだします。これが実数の連続性といわれる所以です。したがって、実数の切断は有理数の切断の場合のようにパターン (3) の切断は生じないということになります。繰り返しになりますが、実数の切断では

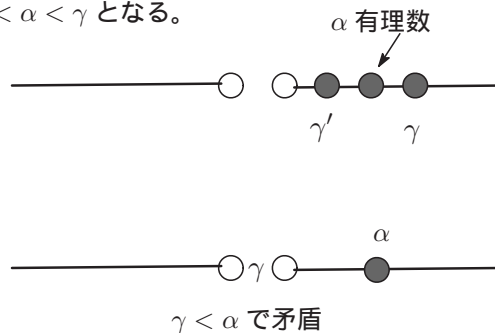
- (1) B側に最少数があり、A側に最大数がない。
- (2) B側に最少数がなく、A側に最大数がある。

というパターンしかないということです。以下にその理由を調べてみましょう。例のよって背理法を使います。

どちらの側にも最大数、最少数がないタイプの実数の切断を Z とします。この切断の上組に含まれる有理数だけを考えると、それを有理数の切断の上組とすると、この切断 Z' は前のパターン (3) で、無理数 γ を定めます。 γ は Z の上組か下組の要素かいずれかです。仮に γ が切断 Z の上組の要素とすると Z の上組には最少数がないのだから、 γ より小さい上組の要素 γ' があるはずですが、 γ' が無理数としても、 γ' を定める有理数の切断を考えれば、その上組の有理数で γ' にいくらでも近いものがあるから、その中にはもちろん γ より小さく γ' より大きい有理数 α が存在します。その α は γ' が Z の上組の要素だからもちろん Z' の上組に入っています。 Z' の上組はすべて γ より大きい有理数のみから成りますから、これは矛盾です。だから、 γ は切断 Z の上組には入らないということになります。同様にして、大小を逆に考えて、切断 Z の下組にも入らず γ ははみだしてしまいます。これは実数を上下2組に分けたことに反します。ということでパターン (3) はあり得ず、これで実数の連続性が説明できました。



もし γ が Z の B 側なら γ' と α が存在し
 $\gamma' < \alpha < \gamma$ となる。



2 集合

カントール⁴によって創された集合論 (Set Theory) は、数学の一分野という狭い範囲に留まらずに、今や現代数学の日常会話の言葉となっており、現代数学のほとんどが「集合」と「写像」の言葉で書かれていると言っても過言ではありません。ルベーグ積分もまさにここが出発点となりますので避けて通るわけにはいかない(笑)。ということで、以下に(ルベーグ積分に必要な)集合論に取り組むことにします。

2.1 集合の表し方

集合というのはモノの集まりのことをいいます。集合を大文字の A, B, C, D などで表し、あるもの x が集合 A に属することを

$$x \in A$$

と書き、集合 A は x を要素にもつといいます⁵。集合の要素を集合の要素と言っています。 y が A に属さないことを

$$y \notin A$$

と書きます。また、2つの集合が等しいということは次のように定義されます。

定義 1. 集合 A, B について

$$x \in A \text{ なら } x \in B \text{ で、逆に } x \in B \text{ なら } x \in A$$

のとき、2つの集合は等しいといい $A = B$ と書く。また、2つの集合が等しいとは

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成り立つことである。

集合 A が集合 B に含まれることを

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

⁴Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845 – 1918), ドイツの数学者

⁵ \in をフォークに例えると分かりやすいかな。 \in をイン, \cup をカップ, \cap をキャップと呼んだりします。

と書きますが、これは次のように定義されます。

定義 2. 定義 1 でいずれか一方だけの式が成り立っているとき、例えば $x \in A$ なら $x \in B$ のとき、集合 A は集合 B に含まれる、あるいは集合 B は集合 A を含むといい、 $A \subset B$ と書く。

$A \subset B$ のとき、 A は B の部分集合であるといいます。要素を一つも含まない集合を空集合と呼び、記号 ϕ で表します。また、集合の集まりのことを集合族と呼んでいます。さて、これら集合を表現する書き方として、外延的記法と内包的記法の 2 通りがあります。外延的記法というのは、その集合に含まれているすべての要素を書き出す方法です。普通はすべての要素を $\{ \}$ で括って示します。例えば 5 以下の自然数の全体が作る集合は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ という具合です。一方、内包的記法は、その集合に属するものの持つべき性質を書く方法で、例えば対象 x がある集合に属する条件が $P(x)$ であるということを $\{x|P(x)\}$ 、つまり $\{x | x \text{ のもつ性質} \}$ という書き方が使われます。

2.2 集合の演算

和集合

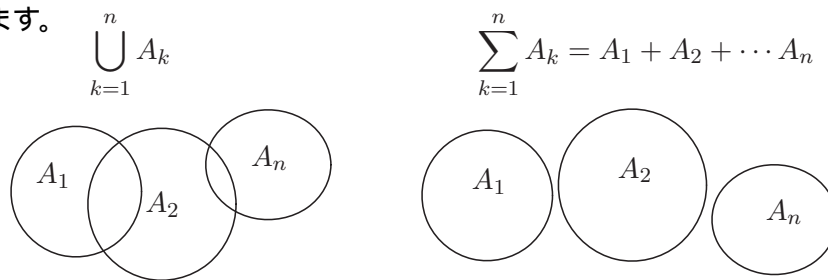
集合 A, B で $\{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$ で決まる集合を A と B の和集合といい $(A \cup B)$ 記号で表します。一般に n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の和集合を

$$\bigcup_{k=1}^n A_k$$

と書きます。また、 n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n のどの 2 つも交わらないとき、これらの和集合を直和と

$$\sum_{k=1}^n A_k = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

と書くことにします。



次の定理はいずれも明らかですね（次ページの図を参照ください）。

定理 1. (1) $A \subset A \cup B$

(2) $B \subset A \cup B$

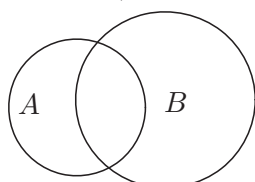
(3) $A \cup A = A$

$$(4) B \subset A \iff A \cup B = A$$

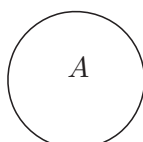
$$(5) A \subset C, B \subset C \implies A \cup B \subset C$$

$$(6) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

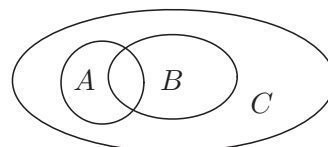
$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$$



$$A \cup A = A$$

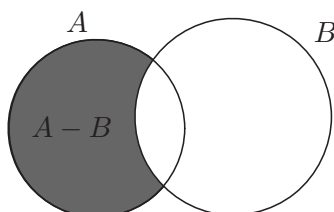


$$A \subset C, B \subset C \iff A \cup B \subset C$$



差集合

集合 A, B に対して $\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ を集合 A から集合 B を差し引いた差集合といい $(A - B)$ と書きます⁶。



$$\text{定理 2. (1) } A - A = \phi$$

$$(2) A - B \subset A$$

$$(3) A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ かつ } (A - B) \cap (A \cap B) = \phi$$

$$(4) A - B = \phi \iff A \subset B$$

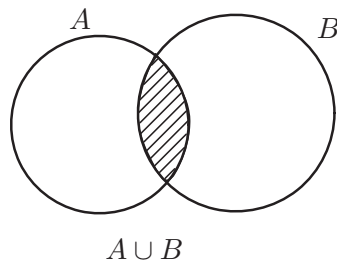
$$(5) A \cap B = \phi \iff A - B$$

交わり

集合 A, B について, 集合 $\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ で決まる集合を2つの集合 A, B の交わりといい, 記号 $(A \cap B)$ で表します。

$$\text{定理 3. (1) } A \cap B \subset A$$

⁶ $A \setminus B$ とも書かれる。



$$(2) A \cap B \subset B$$

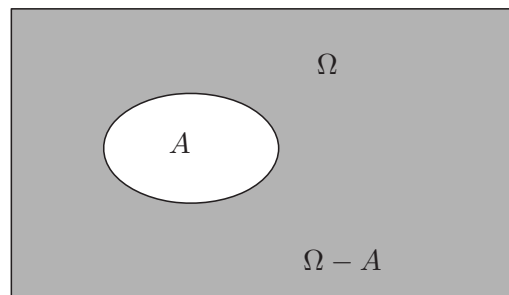
$$(3) A \cap A = A$$

$$(4) A \subset B \text{ かつ } A \subset C \implies A \subset B \cap C$$

$$(5) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

補集合

全体の集合 Ω の要素から集合 A の要素を取り除いてできる要素の集合 (差集合 $A^c \equiv \Omega - A$) を A の Ω に対する補集合といいます。



このことから、ある集合の補集合の補集合はもとの集合自身であるということがいえます。また、自然数の集合では、奇数全体の集合の補集合は偶数全体の集合であるということになります。

$$\text{定理 4. (1) } (A^c)^c = A$$

$$(2) \Omega^c = \phi$$

$$(3) \phi^c = \Omega$$

$$(4) A \supset B \implies A^c \subset B^c$$

$$(5) A \cup A^c = \Omega \implies A \cap A^c = \phi$$

ここで応用上、集合演算について特に重要なド・モルガン⁷の定理を載せておきます。

⁷deMorgan(1806-1871), イギリスの数学者

ド・モルガンの定理。

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

ドモルガンの定理を使うと、集合の計算である等式が成り立つとき、その等式のすべての \cup と \cap を入れ替えた等式が成り立つことが分かります。これを \cup と \cap 双対性といいます。

2.2.1 交換律・結合律・分配律について

公式をまとめて書いておきます。

交換律： $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$$

結合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B)$$

分配律： $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

[例題]

1. $A \cup (A \cap B) = A$ を証明せよ。
2. 1 を使って $A \cap (A \cup B) = A$ を証明せよ。

解答

1. $A \subset A \cup (A \cap B)$ は自明。そこで $A \cup (A \cap B) \subset A$ を示すことで例題1の等式が成立することを示す。 $x \in A \cup (A \cap B)$ とすると、 $x \in A$ または $x \in A \cap B$ である。 $x \in A$ なら $x \in A$ は明らか。また、 $x \in A \cap B$ なら $x \in A$ であるから、いずれにしても $x \in A$ である。よって $A \cup (A \cap B) \subset A$ である。

2. 例題 1 より分配公式から $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A$ 。ド・モルガンの定理を使って $A^c \cup (A^c \cap B^c) = A^c$ を得る。例題 2 の左辺の集合の補集合を 2 回とる。

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cap (A \cup B))^{cc} = (A^c \cup (A \cup B)^c)^c \\ &= (A^c \cup (A^c \cap B^c))^c = (A^c)^c = A \end{aligned}$$

2.3 直積集合

2 つの集合 A, B に対して A と B の直積集合 $A \times B$ は次の式で定義されます。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ここで (a, b) は、順序のついた組を表し、 (a, b) と (b, a) は異なる組と考えます。従って集合の直積については $A \times B = B \times A$ は $A = B$ の場合を除いては成り立ちません。 $A \times B$ と $B \times A$ は集合として相異なるものとなります。また、 n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対する直積集合を作ることができて、それは次式で定義されます。

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

直積集合の具体的なものとしては通常の x, y 平面座標の実数の集合があります。 R を実数の集合とすると

$$R \times R = \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数}\}$$

$R \times R$ は x, y 座標平面上の点の全体を表しており、これを R^2 と書きます。同様に 3 次要素空間座標は

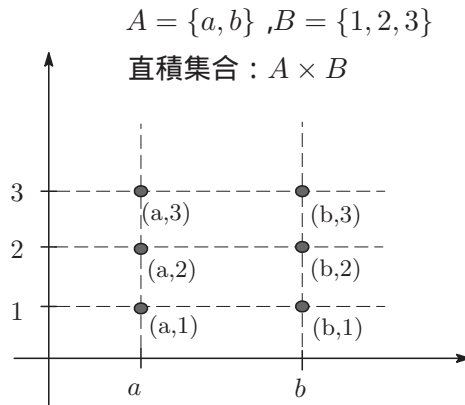
$$R \times R \times R = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ は実数}\}$$

で表され、これを R^3 と書きます。

- キャサリン：直積集合 $A \times B$ という複雑に聞こえるけど、簡単にイメージすれば 2 次要素平面上的 (x, y) 座標点の集合と捉えればいいのね。順序のついた組というけど、座標点 x, y はまさに順序のついた組だものね。
- K 氏：そうなんだ。例えば $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ として、 $A \times B$ の要素を求めると A を x 軸、 B を y 軸に設定してそれぞれの座標の交点が集合 A, B の直積 $A \times B$ の要素となるんだ。同様にして、3 つ以上の集合の直積も同様にイメージしていくことができるね。ということで次の例題で腹ごなしをしてごらん。
- キャサリン：わかったわ。それではと。。

[例題]

- (1) 2 つの有限集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ と $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ に対し、その直積集合 $A \times B$ の要素を求めよ。
- (2) $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ のとき、直積集合 $A \times B, B \times A, B \times B$ を求めよ。



解答

(1) A を x 軸に見立て、 B を y 軸に見立てて、それぞれの要素を各軸にプロットするわね。そして (x, y) 平面上でのこれらの交点が求める直積集合の要素となるから

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n), \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n), \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n)\}$$

となるわけね。

(2) 同様にして、 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ 。次に $B \times A$ は B を x 軸に、 A を y 軸にすればよいから、 $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ 、 $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ となるわね。

- K氏：ご明解，好調だね。それじゃついでだから集合演算の証明のやり方に少し触れておこうか。
- キャサリン：集合演算の練習といったところね。

問題 1

次の等式を証明せよ。

- (1) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- (2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (3) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

解答

(1) $(x, y) \in (A \cap B) \times C$ とする。直積集合の定義より $x \in (A \cap B)$ 、 $y \in C$ 。また、 \cap の定義から

$$(x \in A \text{ かつ } x \in B), y \in C$$

となる。 $(x \in A, y \in C)$ かつ $(x \in B, y \in C)$ であるから、

$$(x, y) \in (A \times C) \text{ かつ } (x, y) \in (B \times C)$$

となる。したがって

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$$

逆に $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ とする。 \cap の定義から

$$(x, y) \in (A \times C) \text{ かつ } (x, y) \in B \times C$$

となる。直積集合の定義から

$$(x \in A, y \in C) \text{ かつ } (x \in B, y \in C)$$

となる。したがって、

$$(x \in A \text{ かつ } x \in B), y \in C$$

であるから

$$x \in (A \cap B), y \in C$$

結局

$$(x, y) \in (A \cap B) \times C$$

である。

(2) 同様に証明できる。

(3) $(x, y) \in (A - B) \times C$ 。 $x \in (A - B)$, $y \in C$ 。 $(x \in A \text{ かつ } x \notin B)$, $y \in C$

$(x \in A, y \in C)$ かつ $(x \notin B, y \in C)$, よって $(x, y) \in \{(A \times C) - (B \times C)\}$

逆に $(x, y) \in \{(A \times C) - (B \times C)\}$, $(x, y) \in (A \times C)$ かつ $(x, y) \notin (B \times C)$, $(x \in A, y \in C)$ かつ $(x \notin B, y \in C)$ よって $(x, y) \in (A - B) \times C$

3 写像

3.1 写像の定義

定義 3. 写像

A と B を 2 つの空でない集合とする。 A の各要素 a に B の 1 つの要素が対応させられているとき、この対応のことを A から B への写像といい、記号 f で表す。すなわち、

$$f: A \rightarrow B \quad \text{または} \quad f: A \rightarrow B \quad a \mapsto f(a)$$

このとき、 A の要素 a に対応する B の要素のことを写像 f による a の像 (Image) といい、 $f(a)$ で表す。また、集合 A を写像 f の定義域または始域、 B を f の値域または終域という。

定義 4. 定値写像

集合 A のすべての要素 a が集合 B の一定の要素 b_0 に対応させられているとき、すなわち

$$f(a) = b_0 \quad (\text{ただし } \forall a \in A)$$

であるような写像 f を定値写像という。

定義 5. 恒等写像

集合 A の要素 a を自分自身 (すなわち a) に写像するものを恒等写像という。これを記号 I で表すと

$$I(a) = a \quad (\text{但し } \forall a \in A)$$

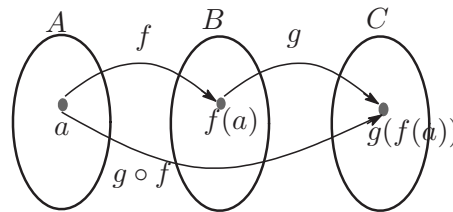
定義 6. 写像の合成

A, B, C を 3 つの集合とします。 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して, A の要素 $a \in A$ に対して C の要素 $g(f(a))$ を対応させる写像 $\psi: A \rightarrow C$ を f と g の合成写像または積といい,

$$g \circ f: A \rightarrow C, (g \circ f)(a) = g(f(a)), (a \in A)$$

で表す。

写像の合成



2 つの写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: A' \rightarrow B'$ が等しいとは $A = A'$ かつ $B = B'$ であって, すべての $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ となることをいいます。このとき, $f = g$ と表します。逆に等しくないときは $f \neq g$ と書きます。

- キャサリン: 写像と関数の違いは何かあるのかしら?
- K 氏: 基本的には同じと捉えればよいと思うよ。関数は, 変数 x の変化につれて変数 y が変化するという動的な視点だけど, 写像の方は x と y の対応を静的な視点で見るということかな。留意すべきこととしては $f(x) = \pm\sqrt{x}$ は関数と呼ぶけど, 写像 $f: A \rightarrow B$ といった場合は, A のすべての要素に対して B の要素 $f(a)$ が決まっていなければならないので, $f(x) = \pm\sqrt{x}$ は写像ではないということだね。写像 $f: A \rightarrow B; a \mapsto f(a)$ の定義のキーポイントを整理しておくとな次の 2 つになるけど, これで写像のイメージをしっかりとつかむことが重要だと思うよ。
 - (1) どの $a \in A$ もその像 $f(a)$ をもつ。
 - (2) どの $a \in A$ に対しても $f(a)$ は一意的に定まる。

[例題] 2 つの整数の集合を X, Y とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ で, f による x の像を $y = f(x) = x^2$ とする。 X の部分集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 9\}$ が与えられたとき, f による集合 A の像 $f(A)$ を求めよ。

解答 f による集合 A の像 $f(A)$ は

$$\begin{aligned}
 f(A) &= \{y \mid (y = x^2) \wedge (x \in A)\} = \{y \mid (y = x^2) \wedge (1 \leq x \leq 9)\} \\
 &= \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}
 \end{aligned}$$

3.2 単射・全射・全単射

定義 7. 単射

A の 2 つの要素 a_1, a_2 とするとき, $a_1 \neq a_2$ ならば常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つとき, この f のことを単射 (injection), または 1 対 1 の写像という。

定義 8. 全射

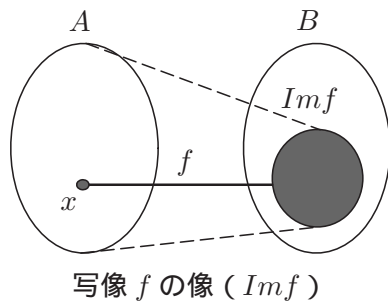
写像 $f: A \rightarrow B$ が $f(A) = B$ となっているとき, この f のことを全射 (surjection) という。

定義 9. 全単射

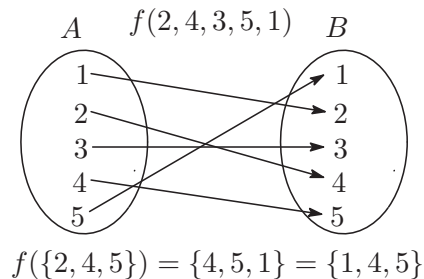
写像 $f: A \rightarrow B$ が $f(A) = B$ となっていて, かつ A の要素が $a_1 \neq a_2$ ならば常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つとき, この, f のことを全単射 (bijection) という。

以下に, 像, 写像, 単射, 全射のイメージ図を載せておきます。集合 A, B をそれぞれ $A = \{1, 2, 3, 4, \}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし写像 f を $f = (2, 4, 3, 5, 1)$ としましょう。そうするとこの f の機能は A の要素 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ のそれぞれを B の要素 $\{2, 4, 3, 5, 1\}$ の各要素に写像していることですね。

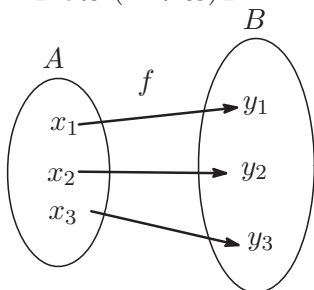
【写像 f の像】



【写像 $f: A \rightarrow B$ 】

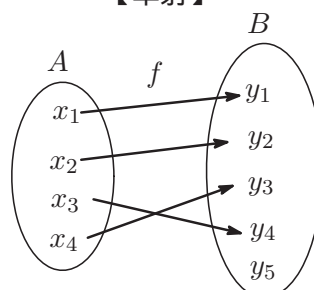


【写像 (全単射)】



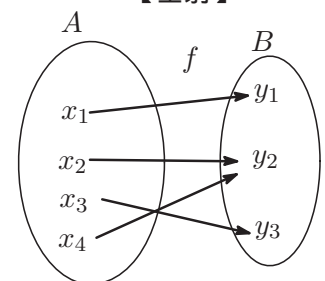
A の全ての元に対して B の元が丁度 1 ずつ対応している

【単射】



A の全ての元に対して B の元が重複せずに対応している. B の余りは OK

【全射】



A の全ての元に対して B の元が対応している. 重複は OK

例 1. 全射ではあるが単射ではない例

要素 x の像が $f(x) = y = x^2$ で与えられているとき，整数の集合 $X = \{x \mid x \in \mathbf{Z}\}$ から $Y = \{y \mid (y = x^2) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$ への写像。 (\mathbf{Z} : 整数全体のなす集合)

例 2. 全射ではなく単射である例

要素 x の像が $f(x) = y = x^3$ で与えられているとき，整数の集合 $X = \{x \mid x \in \mathbf{Z}\}$ から $Y = \{y \mid y \in \mathbf{Z}\}$ への写像。

例 3. 全単射の例

要素 x の像が $f(x) = y = x^3$ で与えられているとき，正の実数の集合 $X = \{x \mid (x \in \mathbf{R}) \wedge (x > 0)\}$ から $Y = \{y \mid (y \in \mathbf{R}) \wedge (y > 0)\}$ への写像。

- K氏：上の例は写像の定義と照らし合わせ，グラフを描けば分かるだろう。それでは次の問題をやってごらん。
- キャサリン：わかったわ。

問題 2 $X = \{a, b, c\}, Y = \{0, 1\}$ とするとき， X から Y への写像をすべて書きだせ。その中で単射，全射，定値写像はどれか。

解答 まず集合 X の要素の数が Y の要素の数より多いから単射はないわね。すると全射と定値写像をチェックすればいいわけだから。。。要素 a は Y の要素 0 と 1 にそれぞれ写像できるから写像は 2 個あるわね。要素 b も c も同様だから，結局写像のすべての個数は $2^3 = 8$ 個あることになるわね。これをマトリクス的に書くとこの中で f_1 と f_8 は X のすべての要素 $\{a, b, c\}$ が Y の同じ要素 1 と 0 に対応す

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
a	1	1	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	1	1	0	0
c	1	0	1	0	1	0	1	0

る写像となっているから定値写像となるわね。 f_2 から f_7 の 6 個が全射となるわね。

3.3 逆像と逆写像

定義 10. 逆像

集合 B の部分集合 D に対して， $f(a) \in D$ となるような集合 A の要素 a を写像 f による集合 D の逆像あるいは原像 (inverse image) といい， $f^{-1}(D)$ で表す。逆像の定義から次のことが成り立つ。

$$a \in f^{-1}(D) \iff f(a) \in D$$

定義 11. 逆写像

$f: A \rightarrow B$ が全単射であるとき， B に属する要素 b に対して $b = f(a)$ となる A の要素 a が一意的に存在する。 $b \in B$ に対してこのように定まる $a \in A$ への写像を逆写像といい，

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

で表す。つまり

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

となる。

問題 3

$f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$ としたとき, 次の式が成り立つことを示せ。

(1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (2) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

解答

(1) $x \in f(f^{-1}(B))$ とすると, $x = f(y)$ となる $y \in f^{-1}(B)$ が存在する。逆像の定義から $f(y) \in B$ となるので, $x \in B$ 。すなわち $f(f^{-1}(B)) \subset B$

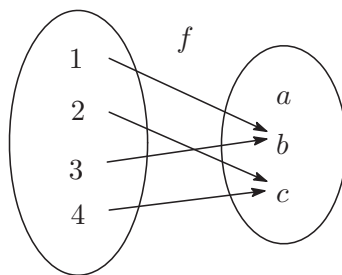
(2) $x \in A$ とすると, $f(x) \in f(A)$ 。これから $x \in f^{-1}(f(A))$ 。結局 $A \subset f^{-1}(f(A))$

[注意] 逆像 f^{-1} は一般には写像ではありません。つまり, 1つの要素 y の逆像が1つに決まるとは限らないからです。 y の逆像が2つ以上あるときは f^{-1} は写像にはなりません。

- キャサリン: f が全単射でない限り逆写像は存在しないので, 逆像と逆写像は紛らわしいけど前後の関係から判別できるわね。逆像のイメージとしては, スクリーン Y に投影されたスポットライトの光源というイメージで, この場合光源は1つとは限らないわけね。投影光を逆にたどって要素の原像(光源)を見つけるというのが逆像のイメージね。一方, 逆写像は光源とスポットライトが1対1に対応していることが条件だから, 逆像とは必ずしも一致しないということになるね。
- K氏: そうだね, そのようなイメージでいいのじゃない。例えば集合 $X = \{1, 2, 3\}$ から集合 $Y = \{a, b, c\}$ への写像 $f: X \rightarrow Y$ を下図のように定めるとしよう。このとき $A = \{1, 2\} \subseteq X$ に対しては $f(A) = \{b, c\}, B = \{a, b\} \subseteq Y$ に対しては $f^{-1}(B) = \{1, 3\}$ となるね。

$$B = \{a, b\} \subseteq Y$$

$$f^{-1}(B) = \{1, 3\}$$



問題 4

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする。集合 X の部分集合 A に対して、 Y の部分集合 $\{f(a) \mid a \in A\}$ を f による A の像といい、 $f(A)$ と表す。また、集合 Y の部分集合 B に対して X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f の B による逆像といい $f^{-1}(B)$ と表す。いま、 $f(x) = x^2$ によって、写像 $f: R \rightarrow R$ を定める。 R の部分集合として、閉区間 $A_1 = [-3, 1]$, $A_2 = [-1, 2]$, $B_1 = [-1, 1]$, $B_2 = [0, 4]$ を考える。

- (1) f による $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ の像を求めよ。
- (2) f による $B_1, B_2, B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2$ の逆像を求めよ。

次の写像 f は全単射であることを示し、その逆写像 f^{-1} を求めよ。

$$f: R \longrightarrow R, f(x) = 3x + 4 \quad (x \in R)$$

解答

- (1) $f(A_1) = [0, 9], f(A_2) = [0, 4], A_1 \cup A_2 = [-3, 2] \therefore f(A_1 \cup A_2) = [0, 9], A_1 \cap A_2 = [-1, 1] \therefore f(A_1 \cap A_2) = [0, 1]$
- (2) $f(B_1) = [-1, 1], f(B_2) = [-2, 2], B_1 \cup B_2 = [-1, 4] \therefore f(B_1 \cup B_2) = [-2, 2], B_1 \cap B_2 = [0, 1] \therefore f(B_1 \cap B_2) = [-1, 1]$

単射であるとは $x_1, x_2 \in R$ が $f(x_1) = f(x_2)$ を満たしているとき、 $x_1 = x_2$ となることを示せばよい。 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$ となり、これから $x_1 = x_2$ が得られるので f は単射である。次に全射であることは $y \in R$ を任意にとり、このとき $y = f(x)$ となる $x \in R$ が存在することを示せばよい。そこでそのような x が存在したと仮定すると x はどのようなものでなければならないかを考える。そのために $y = f(x) = 3x + 4$ を x について解く。すると、 $x = \frac{y-4}{3}$ となることが分かる。そこで $y \in R$ に対して $x = \frac{y-4}{3} \in R$ をとれば、

$$f(x) = 3x + 4 = 3 \times \frac{y-4}{3} + 4 = y$$

となることが分かる。よって f は全射である。 f は単射であって、全射であることが示せたから全単射である。よって逆写像が存在する。逆写像 f^{-1} は、 f が全射になることの証明から

$$f^{-1}: R \longrightarrow R, f^{-1}(y) = \frac{y-4}{3} \quad (y \in R)$$

であることが分かる。

3.4 添え字付けられた集合族

Λ を集合とし、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、ある集合 A_λ が対応しているとき、それらの全体の集合を

$$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

で表し、 Λ によって添え字付けられた集合族といいます。これは Λ から A_λ 等の集合を要素とする集合族への写像として定義できます。

- 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合： $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a \in A_\lambda\}$

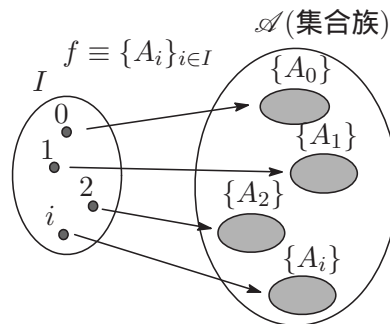
この集合は、少なくともどれか 1 つの A_λ に属するような要素をすべて集めた集合です。

- 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の共通部分： $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a \mid \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a \in A_\lambda\}$
この集合は、どの A_λ にも共通して属する要素だけを選んで作った集合です。
- 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積： $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a \mid \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda} \text{写像}; \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a(\lambda) \in A_\lambda\}$
各 A_λ を直積因子といいます。
- 射影： λ を 1 つ固定し、 $a \in \prod_{\lambda} A_\lambda$ に a_λ を対応させる写像

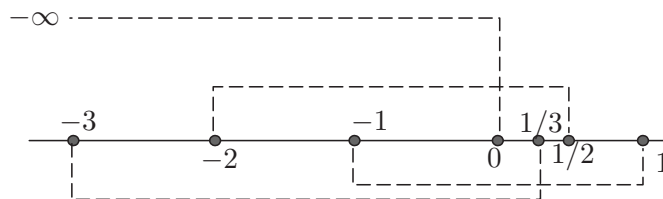
$$p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow A_\lambda$$

を λ 成分への射影といいます。

- キャサリン：集合族って、例えば A_1, A_2, A_3 が集合であるとして、これらの集合の集合を $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ のことを言うと思っていたんだけど、なにか様子が違うよね。
- K氏：いや、集合族はキャサリンの言っている通り、集合を要素にもつ集合を集合族というよね。ただ、いまの場合、添え字付けられた集合族とっているから、集合族の要素である各集合にヒモが付いているというイメージだね。いま、集合族を $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ とした場合、添字 $0, 1, 2, 3, \dots$ の集合を I とすると、 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ と書けるよね。但し、添字は自然数でなくてもよいし、有限でも無限でもかまわない。そうすると添字付きの集合族は、添字 i を集合 A_i に写像する関数ということになる。



- キャサリン：そうなんだ。ところで、集合族の和集合と共通部分の具体的な例をあげていただけませんか？
- K氏：そうだね、具体的にあたったほうが理解が深まるよね。それでは区間 $I_n = [-n, 1/n]$ (n は自然数) に対して $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ を求めてみよう。



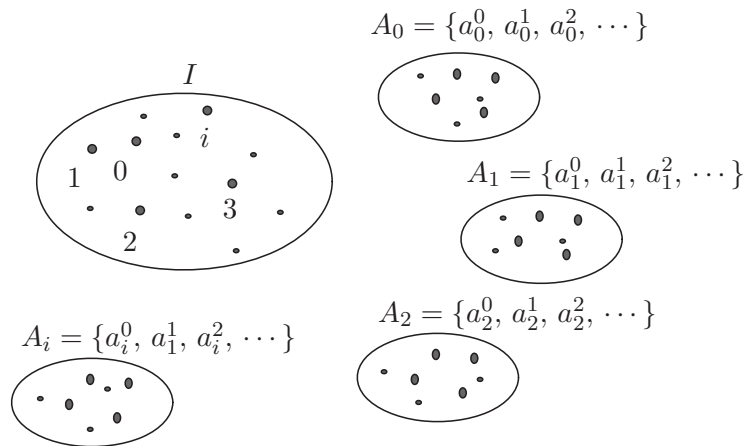
図より、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = (-\infty, 1]$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [-1, 0]$ だね。

- キャサリン：なるほどね，よく分かったわ。ところで先ほどの直積集合は比較的すんなり頭に入ったけど，今回の集合族の直積集合は少し難解ね。説明していただけると有難いんだけど。
- K氏：ニヤハリそうふきたか？
- キャサリン：アレ，なにか声が急にウラがえたようね。
- K氏：イヤイヤ。。(汗;)。集合族の直積集合の定義は先ほどの直積集合と少し異なっていることに注意しよう。

前の場合 ...
$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \times A_2 \times \dots = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\} \quad (1)$$

今の場合 ...
$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i (i \in I)\} \quad (2)$$

(1) の場合は順番があるが，(2) は I の要素 i に対応する A_i の積だが，特に順番は考慮されていないだろ。この点が一般の直積と集合族の直積の違う点なんだ。集合 A_i の要素を $A_i = \{A_i^0, A_i^1, A_i^2, \dots\}$ と書くことにすると，集合族の直積はこれら要素の組み合わせになると僕は理解してるんだが，この点は申し訳ないけどあまり自信がないんだ。。



- キャサリン：そうなんだ。別にあやまる必要はないけど，はっきり分かったらまた教えて，私も調べてみるわ。それでは先に行きましょうか。
- K氏：OK。ちょっとその前に，べき集合について少し触れておくことにしよう。例えば集合 X の部分集合全体の集合を X のべき集合 (べき集合族)⁸ というんだ。これを $\mathcal{P}(X)$ で表す。 $X = \{1, 2, 3\}$ とすると，そのべき集合は

$$\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

と 8 通り，つまり 2^3 通りあるわけだ。つまり $\mathcal{P}(X)$ の部分集合は集合を要素に持っているということだね。ついでに集合関数のことについて少し触れておこうか。ある集合 X のべき集合族 $\mathcal{P}(X)$ で，この族の要素である各集合 (X の部分集合) に，一つの数を対応させる規則，つまり，集合族を定義域とする関数を考えようというわけだ。この対応規則のことを集合関数というけど， $y = f(x)$ という関数とのアナロジーで捉えると， x の定義域として集合族をとろうということだ

⁸ n 個の要素からなる集合のべき集合は 2^n 個の要素からなる。
22

ね。そして「互いに素な集合の和集合に対する関数の値は、それぞれの集合に対する関数の値の和に等しい」という加法性をもつ集合関数が特に重要なんだ。

- キャサリン：いろいろあるのね。

3.5 写像のグラフ

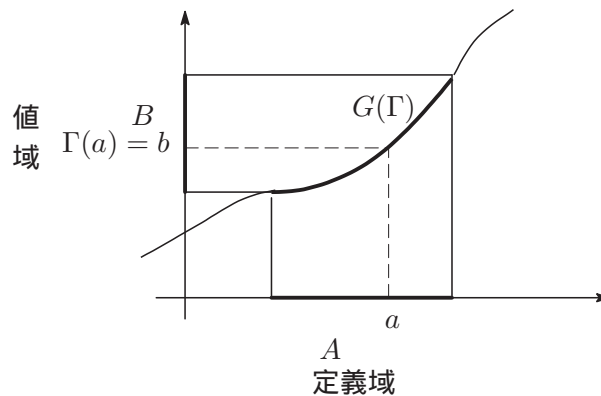
集合 A から集合 B への写像を $\Gamma: A \rightarrow B$ とするとき、直積 $A \times B$ の部分集合

$$\{(a, b) | a \in A, b \in \Gamma(a)\}$$

を Γ のグラフといい $G(\Gamma)$ と書きます。対応 Γ はそのグラフ $G(\Gamma)$ によって一意的に定められます。つまり、 A の任意の要素 a に対して

$$\Gamma(a) = \{b | (a, b) \in G(\Gamma)\}$$

が成り立ちます。また、対応 $\Gamma: A \rightarrow B$ のグラフと G とするとき、 $(a, b) \in G$ となる $b \in B$ が少なくとも1つ存在するような A の部分集合を Γ の定義域といいます。また、 $(a, b) \in G$ となる a の少なくとも1つ存在するような B の部分集合を Γ の値域といいます。



キャサリン：写像のグラフといっても普通の関数のグラフの集合の考えと同じじゃないの。

K氏：そうだね。 $y = f(x)$ というグラフを考えた場合、グラフの軌跡は点 $(x, f(x))$ の集合と考えることができるものね。以前にもいったと思うけど、グラフは2つの変数の関係を表しているという意味合いが強いのに対して、写像のグラフは対応関係を図示しているということかな。つまり、変量という意味が薄れており、直積集合の部分集合としてグラフを捉えるということなんだ。

キャサリン：なるほどね。ものの見方でいろいろ捉え方が変わるものなのね。

3.6 集合算と写像の関係

集合算と写像の関係についてまとめておきます。

定義 12. 写像 $f: A \rightarrow B$, $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$ に対して次式が成立する。

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

- (2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- (3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- (4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- (5) $f^{-1}(B - A_1) = A - f^{-1}(A_1)$

【証明】

(1) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とすると、像の定義より $y = f(x)$ となる $x \in A_1 \cup A_2$ が存在する。このとき $x \in A_1$ なら $y \in f(A_1)$, $x \in A_2$ なら $y \in f(A_2)$. ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. したがって、 $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

逆に $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ とすると、 $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ である。 $y \in f(A_1)$ とすると、 $y = f(x)$ なる $x \in A_1$ が存在する。 $y \in f(A_2)$ とすると、 $y = f(x)$ なる $x \in A_2$ が存在する。よって $y = f(x)$, $x \in A_1 \cup A_2$ となる x が存在するから、 $y \in f(A_1 \cup A_2)$. したがって $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 以上より、 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が示された。

(2) $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、 $y = f(x)$ となる $x \in A_1 \cap A_2$ が存在する。 $x \in A_1$ より $y = f(x) \in f(A_1)$, $x \in A_2$ より $y = f(x) \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1)$ かつ $y \in f(A_2)$. つまり $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. したがって、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が示された。

(3) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ は逆像の定義から $f(x) \in B_1 \cup B_2$ である。すなわち、 $f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$. $f(x) \in B_1$ とすると $x \in f^{-1}(B_1)$, また $f(x) \in B_2$ とすると $x \in f^{-1}(B_2)$. したがって $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(4) $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ は逆像の定義から $f(x) \in B_1 \cap B_2$ である。すなわち、 $f(x) \in B_1$ かつ $f(x) \in B_2$. よって $x \in f^{-1}(B_1)$ かつ $x \in f^{-1}(B_2)$ となり、 $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(5) $x \in f^{-1}(B - A_1)$ とすると $f(x) \in B - A_1$. これは $f(x) \notin A_1$ であるから $x \notin f^{-1}(A_1)$. つまり $x \in A - f^{-1}(A_1)$ 【 】問題2は等号(=)ではなく、 \subset であることに注意してください。例えば実数から実数への写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とします。 $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ とすれば $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. ところが $f(A_1) = [0, 1]$, $f(A_2) = [0, 1]$ だから $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$ となり、等号は成り立ちません。

● キャサリン：なにこれ～

● K氏：いや、折角だから集合算の証明の仕方を紹介しただけなんだ。ひとつひとつフォローしていけばその考えかた、捉え方の訓練になると思うよ。時間のあるときにでもフォローしてみることを進めるけど。

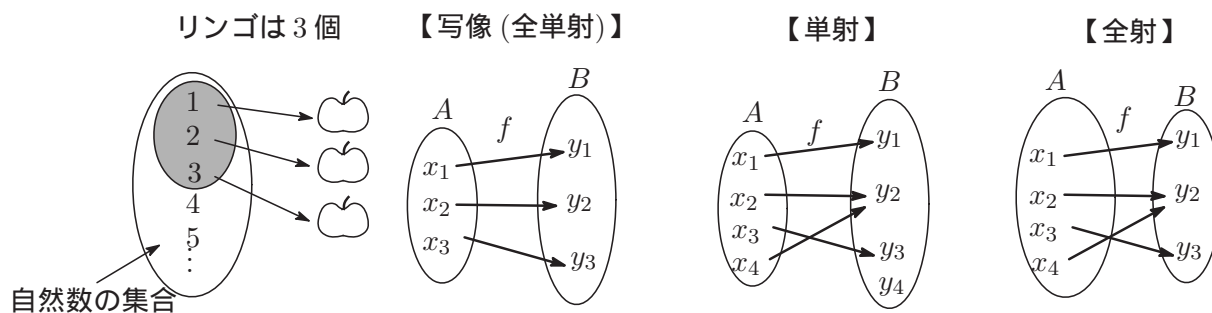
● キャサリン：そうね、別途フォローしてみることにするわ。

3.7 有限集合の要素の個数を比較する

普段の生活で例えばリンゴの数を数えたりするとき、1以上の自然数1, 2, 3とリンゴを1対1に対応させて、全部のリンゴとの対応がついたとき、その最後の自然数をリンゴの数としています。これは自然数の集合とリンゴの対応、つまり「個数を数える」ということの数学的定義は写像により可能となります。「写像」という用語を使えば、「数を数える」という行為は、1以上の自然数の作る集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ やその一部分の $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ や $\{1, 2, 3\}$ などから、皿の上のリンゴのようなモノの集まり

への全単射を作ることだといえます。ということで、 A と B の「個数を比較する」ということは、

[A から B への単射 f が存在する] $\rightarrow B$ の個数は A の個数より多い。
 [A から B の全射 f が存在する] $\rightarrow B$ の個数は A の個数以下である。
 [A から B への全単射が存在する] $\rightarrow A$ と B の個数が等しい。
 ということになります。



【注】有限集合 A があり、それがちょうど n 個の要素をもつとき、集合 A の基数(cardinal number) は n であるといつて、記号 $|A| = n$ で表します。

- キャサリン：なるほど、日常何気なく数を数えているけど、写像という言葉を使うと「数を数える」ということは、1以上の自然数の作る集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ あるいはその部分集合から、例えばリンゴやみかんといったモノの集まりへの全単射を作ることになるのね。
- K氏：そうだね。そして個数の比較は単射 f が存在するか、全射 f が存在するかで決まるし、全単射が存在すれば互いの個数は等しいということになるんだね。

4 無限集合

2つの集合 A, B について、 $f: A \rightarrow B$ という全単射(1:1対応)がつかれるとき、この2つの集合は同等である、あるいは同じ基数を持つといいます。基数が有限である集合を有限集合といい、基数が無限であり、かつ自然数の集合 $\{\mathbb{N} \mid 1, 2, 3, \dots\}$ と同じ基数をもつ集合、つまり自然数と1:1の対応がつか集合を可算集合といいます。それ以外の無限集合は非可算集合⁹といっています。無限集合の場合、基数は無限ですから、基数のことを濃度(potency)と表現することにしています。要素の数は無限個ですから、数えられないものの個数を”濃い””薄い”という濃度表現は感覚的に分かりやすい表現ですね。そして集合 A の濃度を $|A|$ で表すことにします。可算集合は自然数と1:1の対応をもつ無限の大きさを持ちますが、この無限の大きさを \aleph_0 と書き、アレフゼロと読み、可算集合の濃度は \aleph_0 といいます。

4.1 有理数と実数の濃度

4.1.1 有理数の濃度

自然数の集合の濃度を \aleph_0 とします。このとき次のことがいえます。

(1) 整数の集合の濃度は \aleph_0 である。

⁹可算集合を可付番集合、非可算集合を非可付番集合ともいう。

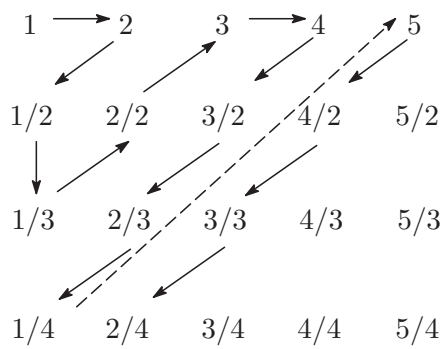
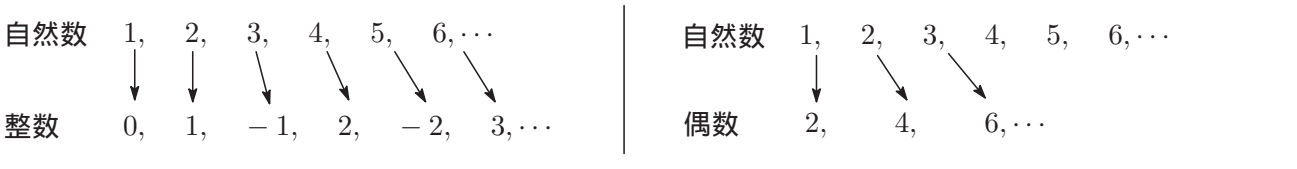
(2) 偶数の集合，奇数の集合，素数の集合の濃度は \aleph_0 である。

(3) 有理数の集合の濃度は濃度は \aleph_0 である。

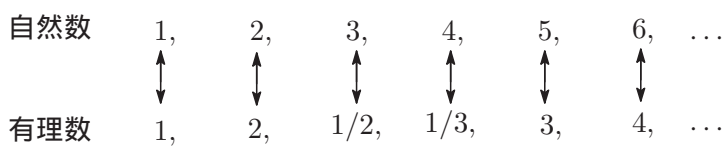
例えば整数の集合 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ を考えてみましょう。これは次のように並べ替えができます。

$$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \longrightarrow \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

つまり，自然数と対応づけることができるからその濃度は \aleph_0 ということになります。同様に偶数の集合も次のように対応づけていけば理解できますね。さて，有理数は有理数と有理数の間に必ず別の有理数があるという稠密性という性質を持っていますので，有理数の要素の数は，ちょっと考えると自然数の要素の数より多いと思われそうですが，有理数の濃度は自然数と同じ濃度になります。その証明を以下に示します。有理数は分数で表されますから，図のように分数を分母の同じ数ごとに並べていきます。図の矢印のように並べていき，同じ数は2度と書かないことにします。こうするとすべての有理数が並べられ，自然数と1：1で対応づけられることがわかります。つまり，有理数の集合の濃度は \aleph_0 ということになります¹⁰。WinTpic の図の挿入



<有理数は自然数と1：1に対応づけられる>



- キャサリン：整数はプラスマイナスがあるから自然数と同じ濃度だと言われても最初はピンとこないわね。
- K氏：そうだね。有限集合の範囲に留まっている限りでは整数の濃度は自然数より濃い。しかし無限集合となると様相は一変する。整数や有理数の濃度が自然数の濃度が同じになるというのは無限集合に特有の現象と考えられるんだ。
- キャサリン：無限というのは懐が深いのねえ～。
- K氏：たしかにそうだね。禅の言葉に「無一物中無尽蔵」というのがあるだろう，なんにも無いことは何でもあるという。。これは非常に味わい深い言葉だね。しかし，老婆心ながら言うけど無限というのをあまり真剣に考えないほうが体のためだよ。。
- キャサリン：ご親切にありがとう，別に数学を専門にするわけではないからホドホドでいくわ。

¹⁰自然数と1：1の対応がつくという事は，注目している集合の要素に通し番号を付けることができるということですね。
26

4.1.2 実数の濃度

実数は有理数に無理数を加えたもの¹¹ですが、すべての実数値に1番から番号をつけることはできません。つまり、自然数と1:1の対応が見つからないということです。実数は有理数の可算無限個よりもずっと多い無限個(非可算無限個)ということになります。この集合の濃度を \aleph_1 (アレフワン)とします¹²と $\aleph_0 \subset \aleph_1$ で \aleph_1 を連続体の濃度とします。さて、実数が自然数と1:1の対応が見つからないことの有名な証明としてカントールの対角線論法¹³があります。

カントールの対角線論法

話をわかりやすくするために実数(無理数)を2進数で表します¹⁴。そして自然数と無理数を1対1に対応することができると仮定します。無理数は無限小数で表されますから、小数点以下どこまでも続きます。そこでその部分は省略して「 \dots 」で表すこととします。

(自然数)

$$\begin{aligned} 1 \quad R_0 &= 0.\underline{1}000000000\dots \\ 2 \quad R_1 &= 0.0\underline{1}000000000\dots \\ 3 \quad R_2 &= 0.11\underline{0}00000000\dots \\ 4 \quad R_3 &= 0.001\underline{0}0000000\dots \\ 5 \quad R_4 &= 0.1010\underline{0}000000\dots \\ 6 \quad R_5 &= 0.011000\underline{0}0000\dots \\ 7 \quad R_6 &= 0.111000\underline{0}0000\dots \\ 8 \quad R_7 &= 0.1001000\underline{0}000\dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

ここで上の2進数のアンダーラインを引いている数値に細工して、新しい実数を作ります。即ち、そこが0であれば1に、1であれば0に書き換え、その結果できた新しい実数(無理数)を R とします。そうすると

$$R = 0.0011111111\dots$$

となります。 R は R_0 と小数点1桁目が異なる、 R_1 とは2桁目が、 \dots というように対角線上の数値が異なるように作りました。したがって、一般に、 R_n とは $n+1$ 番目で異なっているということになり、つまり、新しい実数は自然数と対応付けることができないこととなります。これは、最初、自然数と実数を1対1で対応させることができたということと矛盾します。以上が対角線論法の骨子です。

実数(無理数)というのは有理数よりもはるかに無尽蔵という感じですね。まあ、この辺の話は突っ込んでいくときりがなさそうなので、ポロがでぬ内にやめておきます。さらに追求したい方は巻末の参考文献か適当な書籍を読まれるといいでしょう。

- キャサリン：質問があるんだけどいいかしら？
- K氏：(ドキドキしながら)いいよ。。

¹¹実数=自然数+有理数+根号数+超越数

¹²実数の集合が \aleph_1 となるのは超越数があるから。

¹³カントールは1873年12月7日に「自然数の全体を実数の全体と1:1に漏れなく対応させることはできない。実数の全体 R は N より真に大きな集合である。」ということを証明。対角線論法はそれより後に発見されたようです。

¹⁴何進数で表記しても意味する中身は同じ。

- キャサリン：対角線論法により，たしかに自然数との対応づけができない新しい無理数 R がでてきたけど，この新しい無理数を改めて (3) の最初に並べることになれば，自然数との対応づけが可能になるのじゃないかしら？
- K氏：鋭い突っ込みだねえ～。対角線論法を最初聞いたとき，分かったような気になるけど何か腑に落ちないものを感じるよね。僕もスッキリと理解しているわけじゃないけど，少し補足しておくよ。キャサリンの言うように並べ替えたとする。そうすると新しい無理数も通し番号札をもらえるわけだ。しかし，新しい並びで，同じように対角線上の数値を書き換えていくと，自然数と対応できない新しい無理数が生まれてくる。再び並び替えて云々という操作は無限回試行できるが，そのたびに新しい無理数が生まれてくるというわけだ。つまり，通し番号札を付けることができたとしても，その並びには属さない新しい無理数が必ず存在するということだね。まるで魷の追いかけごっこという感じだ。
- キャサリン：ふ～ん，ここにも無限の不可思議さが漂っているという感じね。

4.2 無限の濃度

有理数の濃度は自然数の濃度と同じ可算濃度で \aleph_0 (アレフゼロ) と表わしました。実数の濃度は，対角線論法により可算濃度より濃いことが知られており，連続体濃度と呼ばれ， \aleph_1 (アレフ 1) で表わされます。連続体濃度といいます。ところで，可算濃度と連続体濃度の間に他の濃度が存在しないのか，という疑問は，カントールの「可算濃度より大きい最小の濃度は連続体濃度である」という連続体仮説により解消されました。この仮説は，現代数学の公理とされています¹⁵。

さて，無限の不可思議さの一端を垣間見たわけですが，なんと無限にも階層構造があるということは更なる驚きです。無限は無限にあるというその辺りの事情をサッと探ってみましょう。証明は省略します。

無限は無限にあるのか？

→ はい，どのような無限に対してもそれより大きい無限が存在します。つまり，無限は無限にあることになります。

実数の濃度より高い (濃い) 濃度の集合は存在するのか？

→ はいいくらでも高い濃度の集合は存在します。

可算濃度 \aleph_0 より小さい (薄い) 濃度は存在するか？

→ いいえ，存在しません。すべての無限集合は可算部分集合を含みます。

- キャサリン：無限の無限なんて，何か想像を絶する世界に入り込んだ感じね。
- K氏：大抵の人はここで失神する。。。 (笑い)，というのは冗談だけど，まっ，失神する前に先に進もうか。

4.3 無限集合の比較

2つの集合の濃度を比較する際の有効な手段として，ベルンシュタインの定理が知られています。

¹⁵連続体仮説は正しいと結論されたのは 1960 年代に入ってからとのことで，「連続体仮説が正しいことも正しくないことも従来の数学の体系では証明できない」ということが証明されたとのことです。

定義 13. 2つの集合 X, Y について X から Y への単射および Y から X への単射がともに存在すれば, X と Y の濃度は等しい。

- キャサリン: 以前, 2つの集合 X, Y で $X \subset Y$ かつ $Y \subset X \implies X = Y$ というのを習ったわね。この場合, 当然2つの集合 X, Y の濃度は等しいから $|X| = |Y|$ 。ベルンシュタインの定理というのはこの焼き直しのようなものね。
- K氏: そうだね。次に, ベルンシュタインの定理のいくつかのバリエーションを紹介しておくよ。

4.3.1 ベルンシュタイン定理の応用

定理 5. (1) 2つの集合 X, Y について次が成り立つ。

$$|X| \leq |Y|, |Y| \leq |X| \text{ ならば } |X| = |Y|$$

- (2) X から Y への単射 $f: X \rightarrow Y$ と, X から Y への全射 $g: X \rightarrow Y$ があれば, X と Y は同等。
 (3) X から Y への全射 $f: X \rightarrow Y$ と, Y から X への全射 $g: Y \rightarrow X$ があれば, X と Y は同等。

4.4 濃度の演算と無限大の演算規則

4.4.1 濃度の演算

次のことが成立します (証明は適当なテキスト参照)。

- (1) $\aleph_0 + \dots + \aleph_0 = \aleph_0$
- (2) $\aleph_1 + \dots + \aleph_1 = \aleph_1$
- (3) $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$
- (4) $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \dots \times \aleph_0 = \aleph_0$
- (5) $\aleph_1 \aleph_1 = \aleph_1 \dots \aleph_1 = \aleph_1$
- (6) \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像, すなわち実関数の集合の濃度を \aleph_2 とかくと $\aleph_1 \subset \aleph_2$ が証明されています。

4.4.2 無限大の演算規則

$+\infty, -\infty$ に関係のある四則演算については次のような約束を設けておきます¹⁶。 a を有限な実数であるとす

- (1) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, (+\infty) - a = +\infty$
- (2) $a - (+\infty) = -\infty, (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- (3) $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty, (-\infty) - a = -\infty$

¹⁶ $(+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), (+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty), \pm\infty / \pm\infty, a/0, \pm\infty/0$ という演算は定義されない。これらの算法は無意味なものとして扱わないこととする。

- (4) $a - (-\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- (5) $a > 0$ ならば $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty, \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$
- (6) $a < 0$ ならば $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$
- (7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- (8) $a / +\infty = 0, \quad a / -\infty = 0, \quad 0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$

5 点集合と位相

点集合とはでたらめに集めた点の集合ではなく、ある一定の条件を満たす点の集合のことを言います。具体的には、空間や平面、直線を点の集まり、つまり点の集合と考えることができます。例えば (x, y) 平面上の点 $P(a, b)$ を中心とする半径 r の円内の点の集まりを K とすると、この K は一つの点集合となります。

$$K = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

ここで r は xy 平面上の任意の 2 点間の距離で、集合の要素の間に距離を導入したことになります。集合の中に距離を決めることができる場合は、その距離を使ってその集合の要素のそれぞれに近いとか遠いとかの概念を導入する¹⁷ことができます。このように数同士の近さを考えたり、2 点間の距離を測ることができるということを「位相構造」といいます。

- キャサリン：位相構造というのは距離を定める構造ということなの？
- K 氏：位相構造というのをキチンと定義・理解するには、以下で勉強するようないろいろな知識が必要なんだ。そこで、ここでは位相構造により集合の要素の間が近いか遠いか等を論じることができるようになるという程度の理解でいいと思うんだけど。。
- キャサリン：まあ、しばらくはそういうもんだと思っておいてほしいということね。わかったわ。
- K 氏：ヨロシク。。(汗;) のちほど、ここのセクションの勉強が終わったら位相空間の定義を載せることを約束するから、それまで楽しみにしておいて。

5.1 距離空間

集合の記号を使って、座標平面を R^2 、座標空間を R^3 と書くことにします。座標空間 R^3 内の 2 点を $p(x, y, z), q(x', y', z')$ とし、この 2 点間の距離を $d(p, q)$ であらわすと

$$d(p, q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (4)$$

と書かれることはよくご存知のことです。これを 3 次元ユークリッド空間とっています。

いま、 X を空でない集合とします。 X の任意の 2 要素 x, y に対して実数 $d(x, y)$ が定まっていいて、次の 3 条件を満たしているとき、2 変数関数 d を集合 X 上の距離関数といい、距離関数 d が一つ定められた集合 X を距離空間といい、 (X, d) と書きます。

- (1) $d(x, y) \geq 0$ かつ $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式とかシュワルツの不等式といわれる)

¹⁷これを位相を導入したという。

n 個の実数の順序対 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ に対して

$$d^{(n)}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (5)$$

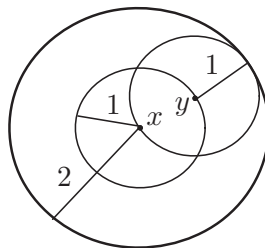
とおくとき、この関数 $d^{(n)}$ は R^n 上の距離関数で、この距離空間を n 次元ユークリッド空間と呼んでいます。

- キャサリン：距離関数 d にしても、距離空間にしても通常の平面や空間しか思い浮かばないけど、数学の定義というものはシンプルな分だけ意味が深いよね。なにかアツというものが飛び出してきたりして。。
- K氏：そうだね。上の距離関数もピタゴラスの定理かということで見過ごしてしまうとそれだけだけど、距離関数の条件を吟味するといろいろあっと驚くことがでてくるんだ。例えば、任意の空でない平面集合 X の任意の 2 要素 x, y に対して

$$d(x, y) = 1 \quad (x \neq y), \quad d(x, y) = 0 \quad (x = y)$$

としてみよう。 d は上に書いた距離関数の条件を確かに満たしているだろう。だから、関数 d は集合 X 上の距離関数となる。これを離散距離関数といったりしているけど、同じ点を除くすべての点は 1 だけ離れているということの意味しているんだね。ということは、ある点を中心に半径 2 の円を描くと、すべての点が含まれる、ということになる。

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 1 & (x \neq y) \\ d(x, y) &= 0 & (x = y) \end{aligned}$$



- キャサリン：驚きね！先ほどの距離関数の条件を満たす d からこのような距離空間 (X, d) が生まれるのね。
- K氏：おまけに次のような距離空間を考えてみよう。任意の空でない平面集合 X の任意の 2 要素 $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$ に対して

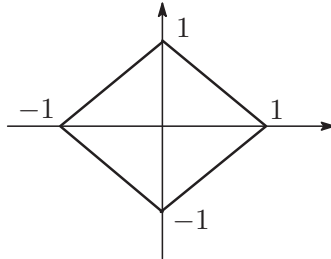
$$d(p, q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

としてみよう。 $d(p, q)$ は上に書いた距離関数の条件を満たしている。そこで、この距離空間 (X, d) で原点を中心とする半径 1 の円を描いてみるとどのようになるか？。。キャサリン、確かめてみるかい。

- キャサリン：そうね。まず q を原点にすると距離関数 d は

$$d(p, 0) = |x_1| + |y_1|$$

となるわね。半径1の円とは $d(p, 0) = 1$ を満たす点 $p(x_1, y_1)$ の集合のことだから、円の方程式は $d(p, 0) = |x| + |y| = 1$ とかけるわね。これを象限ごとに分けて調べると [第1象限] $x, y > 0 : x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$, [第2象限] $x < 0, y > 0 : -x + y = 1 \rightarrow y = 1 + x$, [第3象限] $x, y < 0 : -x - y = 1 \rightarrow y = -1 - x$, [第4象限] $x > 0, y < 0 : x - y = 1 \rightarrow y = -1 + x$ となるから、求める円の図形は普通にイメージする丸ではなくて下の図のようになるのね。



- K氏：正解。距離空間というのは多彩なイメージをもっているよね。

5.2 位相空間としての数直線

距離空間を勉強したので、次に1次元空間である数直線の性質について少し調べてみましょう。数直線の厳密な定義はともかくとして、ここでは数直線上の点は実数と対応しており、対応した数はその点の座標を表すとしておきます。そして点 p の座標が x であることを $p(x)$ と書くことにします。そして数直線上の2点間の距離は (5) より

$$d(p, q) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

で与えられます。

5.2.1 近傍と開集合・閉集合

距離を使うと数直線上の点(数)について、その点の「近く」という概念を定義することができます。これをその点の近傍といいます。具体的に見ていきましょう。

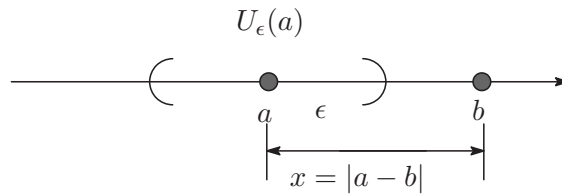
近傍

数直線 R 上の点 a から距離 ϵ 未満の点の全体を a の ϵ 近傍といい、 $U_\epsilon(a)$ と表します。

$$U_\epsilon(a) = \{x \mid |x - a| < \epsilon\}$$

いま、数直線上の異なる2点 a, b に注目します。すると、点 a にどんな近い点 b をとっても、 b よりさらに近い点があるということが分かります。というのは、2点 a, b 間の距離を x とすると、 $|a - b| = x$ で、 $x > 0$ ですから $0 < \epsilon < x$ となる実数 ϵ が必ず存在します。そこで、例えば $\epsilon = x/2$ ととれば、この ϵ に対して $b \notin U_\epsilon$ となります。これが数直線上の「近い」という構造が持っている性質ということになります。

- キャサリン：数直線 R 上の近いという構造は、実数の稠密性、つまり、「 a, b を2つの異なる実数とし、 $a < b$ とする。このとき、 $a < x < b$ なる実数 x が存在する」ということからくるのね。
- K氏：ピンポ～ン。



内点, 外点, 境界点, 触点

数直線を少し拡張して, 実数平面上 (R^2) の点集合 A を考えましょう。 R^2 上の任意の点 x の間の関係は次のように分類することができます。

(1) 内点: x の ϵ 近傍 $U_\epsilon(x)$ に対して

$$U_\epsilon(x) \subset A$$

を満たすような ϵ が存在するとき, 点 x を A の内点といいます。そして A のすべての内点の集合を開核といい, $A^\circ, A^i, \text{Int}(A)$ などと書きます。

(2) 外点: 内点とは逆に,

$$U_\epsilon(x) \subset A^c$$

を満たすような ϵ が存在するとき, 点 x を A の外点といいます。点 x は A^c の内点になっているということですね。そして A のすべての外点の集合を A の外部といいます。

(3) 触点: 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

が成立するとき, 点 x を A の触点といいます。そして A の触点全体の集合を A の閉包あるいは触集合といい $\bar{A}, \text{Cl}(A)$ などと書きます。

(4) 境界点: A の内点は定義により A の触点ですが, A の触点であって A の内点ではない点を A の境界点といいます。そして A の境界点全体の集合を A の境界といい, $\partial A, \text{Fr}(A), A^f$ などと書きます。

上の定義から $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$ となっていることに注意しておきましょう。

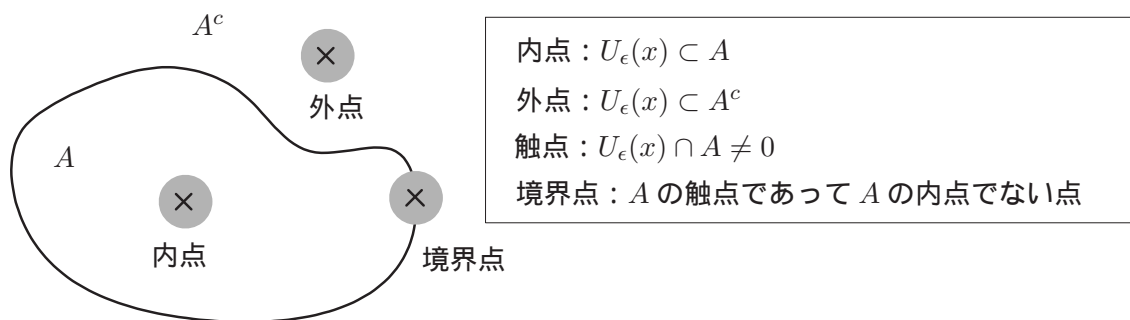
- キャサリン: 次に, 内点は x の ϵ 近傍が集合 A に含まれる点のすべて, 外点は x の ϵ 近傍が集合 A の補集合 A^c に含まれる点のすべて, そして, 境界点は内点でも外点でもない点であるわけだけど, さらに突っ込んで表現すると A の触点であって内点ではない点ということになるのね。
- K氏: そうだね。これを図示すると次のようになるよ。

集積点, 孤立点, 導集合

集積点とは, ある要素 x の任意の近傍 $U(x)$ に集合 A の要素が無限に含まれる点のことをいいます。この集積点 x は A の要素である場合とそうでない場合があります。例えば $B = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ の集積点は 0 ですが, この 0 は B の要素ではありません¹⁸。また, 集積点 x が集合 A の要素であるとき, A を閉集合といいます。

集合 A の要素 x のある近傍 $U(x)$ において, x 以外に A の要素を含まないような近傍が存在するなら

¹⁸高木の解析概論より引用: m, n を任意の自然数とて, 点 $(1/m, 1/n)$ の集合を S とすれば, $(1/m, 0), (0, 1/n), (0, 0)$ が集積点である。



ば, x を A の孤立点といいます。いいかえると A の集積点ではない点 ($x \in A$) が A の孤立点ということです。先ほどの $B = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ の要素はすべて孤立点となります。

また, A のすべての集積点の集合を導集合といい, A^d で表します。

- キャサリン: いろんな用語が次から次へとでてくるのねえ~。覚えるのに大変だわ~。
- K氏: たしかに。。(汗;) だけど一気に覚えこもうとするとしんどいから, イメージをつかんでいけばいいんじゃないかなあ。忘れたらまた戻って, そのいうことを繰り返しやっているとそのうちに頭に定着してくると思うけど。。
- キャサリン: そうね, そういうことね。いろんな用語もそれなりの理由があって生まれてきたんだからね。
- K氏: そうだね。繰り返しになるけど, 集積点というのは「一つの集合 A について, ある点 x が集積点であるとは, 点 x にどれだけ近いところにも A に属する点がある」ことをいうんだね。ここで x は必ずしも A に属する点でなくてよい。これはまた, A の中から x と異なる点の列 a_1, a_2, \dots で, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ であるようなものがとれることといってもよい。また, 先ほど習った触点という概念を取り入れると, 数直線の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し, $A - \{x\}$ の触点になるような点 R を A の集積点という, ということができる。そして集積点でない点を孤立点というけど, 孤立点の周りには A に属する点がないのだからまさに孤立点ということになるよね。導集合は集積点の集合のことだ。

開集合と閉集合

両端を含んだ区間を閉区間, 両端を含まない区間を開区間といい, それぞれ次のように書きます。

$$\text{閉区間} \quad \{x \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

$$\text{开区間} \quad \{x \mid a < x < b\} = (a, b)$$

A. 開集合

定義 14. 距離空間を (X, d) として, 集合 X の部分集合を A とする。 A が X の開集合であるためには, 任意の点 $x \in A$ に対して,

$$U_\epsilon(x) \subset A$$

となる x の ϵ 近傍 $U_\epsilon(x)$ が存在することが必要十分である。

開集合とは、 $A^\circ = A$ となる集合のこと、つまり、集合 A の要素が A の内点となっている集合で、その境界上にある点を含まない集合のことです。いいかえると、 A に属するすべての点に対して、その点の十分小さな周り (近傍) も A に属する集合のことをいいます。集合 X の開集合は次の3つの基本的性質を持ちます。

(1) X 自身と空集合 ϕ は X の開集合である。

例えば、数直線上の任意の点をとっても、その ϵ 近傍は数直線に含まれるので、数直線 R 自身は開集合です。また、空集合 ϕ は要素を含まないから定義 14 の命題は常に正しいということになりますが、 ϕ が開集合になるというのは約束と考えてもかまいません。

(2) X の有限個の開集合の共通部分は X の開集合である。

A_1, A_2, \dots, A_n が X の開集合とすると、 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ もまた X の開集合であるということですね。

(3) X の無限個も含めての開集合の和集合は X の開集合である。

X の開集合からなる任意の集合族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対し、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ はまた X の開集合である。

【証明】

(1) 略。

(2) $x \in \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ とする。 A_{α} は開集合であるから、 x のある ϵ 近傍 $U_{\epsilon}(x)$ で $U_{\epsilon}(x) \subset A_{\alpha}$ となるものがある。また、 A_{α} は $A_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ であるから、 $U_{\epsilon}(x) \subset A_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ となり、 $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ は開集合となる。

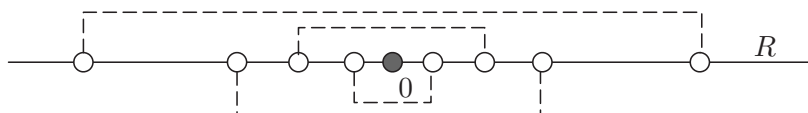
(3) $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ とする。 A_i は開集合であるから、 x のある ϵ_i 近傍 $U_{\epsilon_i}(x)$ で $U_{\epsilon_i}(x) \subset A_i$ となるものがある。ここで、 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ の最小数を ϵ とすると、 x の ϵ 近傍 $U_{\epsilon}(x)$ はすべての i について $U_{\epsilon}(x) \subset U_{\epsilon_i} \subset A_i$ となっている。したがって $U_{\epsilon}(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ となり、 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ は開集合である。

(証明終わり)

ところで、開集合の2番目の性質に関して、無限個まではいいませんでした。これを無限個の開集合の共通部分にまで広げると必ずしも開集合とはならないことがあります。この例を次に示します。

[例] 次の開集合 $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ の無限個の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は開集合とはならない。これは数直線状

に絵を描いていけば共通部分は $\{0\}$ しかないことがわかります。つまり、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は1点 $\{0\}$ だけからなる集合となり、1点だけからなる集合は閉集合ですから、上の集合は開集合になりません。



- キャサリン：開集合の無限個の共通部分は必ずしも開集合とはならないというのは、無限というものの奥深いところね。ところで、1点だけからなる集合は閉集合というのは証明されたのかしら？

- K氏：(ドキッ)え〜っと，その証明は閉集合を勉強したときにやることとして，無限の世界は常識的な考えとしばしばくい違ふことがよく起こる世界だね。

B. 閉集合

定義 15. 距離空間を (X, d) として，集合 X の部分集合を B とする。 B が X の閉集合であるためには，任意の点 $x \in X - B$ に対して，

$$U_\epsilon(x) \cap B = \phi$$

となる x の ϵ 近傍 $U_\epsilon(x)$ が存在することが必要十分である。また， B の補集合 $X - B$ が開集合のとき， B を閉集合という。

閉集合は開集合と対になる概念で，開集合 A の補集合 A^c の集合のことです。別のいいかたをすると， $A^\circ = A$ が開集合と定義されるのに対し，閉集合は触集合 \bar{A} が集合 A に等しい，つまり $\bar{A} = A$ で定義されます。また，集合 A とその導集合 A^d の間に $A^d \subset A$ なる関係が成立する集合，つまり，集合 A の集積点がすべて A に含まれるとき A を閉集合といいます。ここで閉集合の基本的な性質をあげておきます。

(1) X 自身と空集合 ϕ は X の閉集合である。

先ほど数直線 R と空集合 ϕ は開集合であるといいましたが，閉集合でもあります。このように，開集合で同時に閉集合でもある集合は存在します。

(2) X の有限個の閉集合の共通部分は X の閉集合である。

B_1, B_2, \dots, B_n を閉集合とすると， $\bigcap_{i=1}^n B_i$ は閉集合であるということですね。ここで有限個という条件に留意してください。

(3) X の無限個も含めての閉集合の和集合は X の閉集合である。

X の閉集合からなる任意の集合族 $\{B_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ に対し， $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ は閉集合である。

【証明】

(1) $X - X = \phi, X - \phi = X$ つまり X と ϕ は互いに補集合だから，数直線 X と空集合 ϕ は閉集合でもある。

(2) $\bigcap_{\alpha} B_\alpha$ の補集合はド・モルガンの定理より， $(\bigcap_{\alpha} B_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha} B_\alpha^c$ 。

$X - \bigcap_{\alpha} B_\alpha = (\bigcap_{\alpha} B_\alpha)^c, \bigcup_{\alpha} B_\alpha^c = \bigcup_{\alpha} (X - B_\alpha)$ であるから， $X - \bigcap_{\alpha} B_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X - B_\alpha)$ となる。 $X - B_\alpha$ は開集合だから，前に述べた定理により $\bigcup_{\alpha} (X - B_\alpha)$ も開集合となる。よって $\bigcap_{\alpha} B_\alpha$ は閉集合。

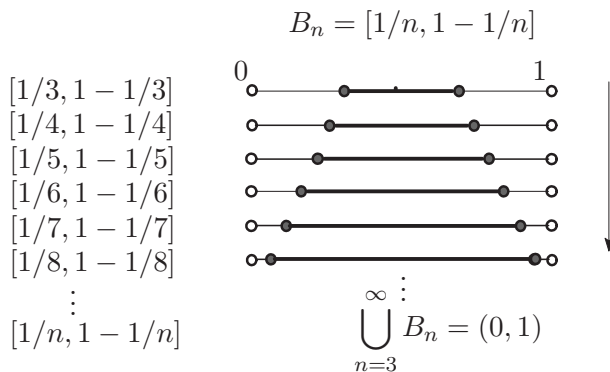
(4) 上の証明と同様ドモルガンの定理より $X - \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (X - B_i)$ 。ところで $X - B_i$ は開集合だから，前に述べた定理により $\bigcap_{i=1}^n (X - B_i)$ は開集合である。したがって， $\bigcup_{i=1}^n B_i$ は閉集合である。

- キャサリン：(2) 開集合と同じように無限個の場合は必ずしも閉集合とはならないと指摘されているけど，ここでも無限の影がちらつくのね。

- K氏：そうなんだ。例によってその辺りをチェックしてみよう。

[例] $B_n = [1/n, 1 - 1/n]$ とする。このとき、無限個の閉集合の共通部分 $\bigcup_{n=3}^{\infty} B_n$ は閉集合とはならない。

証明は略すけど、絵を見れば $B_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$ となるのがわかるよね。



● K氏：以上、開集合と閉集合を勉強してきたわけだけど、近傍という捉え方が2つの集合を区分する決定的なキーをにぎっていたわけだね。さて、各項が集合内の数である数列を取り上げて、開集合と閉集合における数列の振る舞いの要素を調べてみよう。Aを開集合とし、各項がA内の数である数列を $\{a_n\}$ とし、Bを閉集合として、各項がB内の数である数列を $\{b_n\}$ としよう。ここで注目してほしいのは、 $\{a_n\}$ が収束するときその極限值はAに入るとは限らないということ。一方、 $\{b_n\}$ が収束するとき、その極限值は必ずBに入る、ということなんだ。まさに、開集合と閉集合の質的な差異を示しているんだね。

● キャサリン：開と閉はどこまでも相反するのね。。。具体的な例をあげていただけませんか。

● K氏：OK，例えば $A = (0, 2)$ で $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ という数列を調べてみよう。この数列は明らかに0に収束するけど、極限值の0はAには入らないだろう。

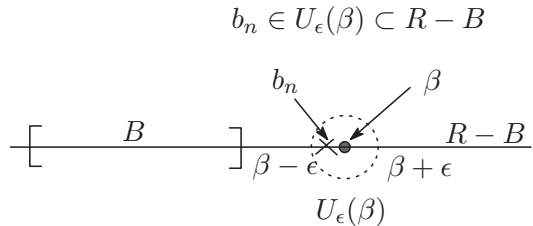
次に数列 $\{b_n\}$ の極限值を β としよう。つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta, \beta \in B$$

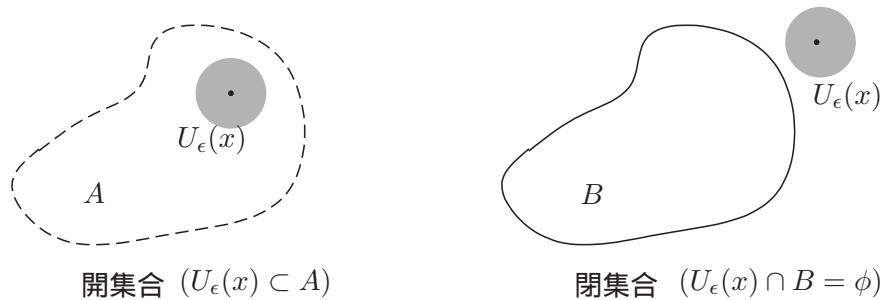
ということだね。

いま、 $\beta \notin B$ とすると $\beta \in R - B$ だね。Bは閉集合だから、定義により $R - B$ は開集合となる。開集合には β の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\beta) \subset R - B$ となる $U_\epsilon(\beta)$ が必ず存在する。

ところが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ だから、十分大きな n をとると $|b_n - \beta| < \epsilon$ となるが、これは b_n が β の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\beta)$ 内に入ることを意味しており、 $b_n \in B$ と反することになる。したがって、極限值 β は必ずBに入らなければならない、ということだね。



- キャサリン：なるほど，最後の閉集合の数列の場合，数列 $\{b_n\}$ の項が極限で集合 B に属さなくなるという矛盾を突いているわけね。ところで，開集合は $U_\epsilon(x) \subset A$ ，閉集合は $U_\epsilon(x) \cup B = \phi$ と定義されたけど，この定義をビジュアルに描くとどうなるのかしら？
- K氏：そうだね。 ϵ 近傍を濃い円で描くと次のようなイメージかな。



- K氏：さて，ここでお約束の位相空間の定義を載せておくことにしようか。
- キャサリン：約束を守ってくれたのね。楽しみだわ。
- K氏：うっふぉん！（急に咳き込んで）さて， X を任意の集合とし， X の部分集合族を \mathcal{T} であらわすよ。

$$\mathcal{T} = \{X_\alpha : \alpha \in A\}, \quad \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

この \mathcal{T} が次の3条件を満たすとき， \mathcal{T} を X の一つの位相構造または位相というんだ。

- (1) X と ϕ は \mathcal{T} に属する。

$$X \in \mathcal{T}, \phi \in \mathcal{T}$$

- (2) \mathcal{T} に属する有限個の X の部分集合 X_1, X_2, \dots, X_n の共通部分は，また \mathcal{T} に属する。

$$\bigcap_{i=1}^n X_i \in \mathcal{T}$$

- (3) \mathcal{T} に属する任意個数の X の部分集合の和集合は，また \mathcal{T} に属する。

$$\{X_\beta : \beta \in B\} \subseteq \mathcal{T} \text{ ならば } \bigcup_{\beta \in B} X_\beta \in \mathcal{T}$$

そして，位相構造 \mathcal{T} が一つ定められた集合 X を位相空間といい， (X, \mathcal{T}) または単に X と表す。このとき， X の要素をこの位相空間 (X, \mathcal{T}) の点と呼び， \mathcal{T} に属する X の部分集合を (X, \mathcal{T}) の開集合という。また， X の部分集合族 \mathcal{T} で，上の性質を持つものを指定することを集合 X に位相を入れるというんだ。

- キャサリン：ちょっと待って，この定義って先ほど勉強した開集合の3つの基本的性質そのものじゃないの。
- K氏：そうだよね。位相構造の定義の仕方はいろいろあるらしいんだけど，上の場合は開集合系による定義ということになるんだ。。。あまり詳しいことは知らないでこれ以上の突っ込みはしないでネ！ところで，距離空間 (X, d) の開集合は明らかに X の位相空間ということになるよね。

- キャサリン：いままで数直線の集合で、 ϵ 近傍という考えを取り入れて開集合を定義し、その集合の持つ性質を論じてきたわね。その性質が取りもなおさず位相構造の定義だったというわけね。ところで、集合っているいろいろあるじゃない。例えば集合 $S = \{a, b, c\}$ の場合に、Kさんが先ほど言った位相を入れるということはどうなるのかしら？
- K氏：そうだね、いま S の部分集合族 \mathcal{T} を $\mathcal{T} = \{\phi, \{a, b\}, \{b, c\}, S\}$ とする。ところで、この部分集合族 \mathcal{T} は、 S の部分集合 $\{a, b\}$ と $\{b, c\}$ の共通部分 $\{b\}$ を含んでいない。つまり、共通部分 $\{b\}$ が \mathcal{T} に属さないので、上の定義 (2) により \mathcal{T} は位相構造ではない、ということになる。そこで \mathcal{T} に $\{b\}$ を加えて

$$\mathcal{T}_1 = \{\phi, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, S\}$$

とすると、

- $S \in \mathcal{T}_1, \phi \in \mathcal{T}_1$ で定義 (1) を満たします。
- 当然、定義 (2) は満たします (満たすように $\{b\}$ を加えた)。
- S の部分集合の和集合は $\{a, b\} \cup \{b, c\} = S, \{a, b\} \cup \{c, a\} = S, \{b, c\} \cup \{c, a\} = \{a, b\} \cup \{a, c\} \cup \{b, c\} = S, \{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = S$ (だけかな?)。

ということでこれらの和集合はすべて \mathcal{T}_1 に属する。以上のことから、 \mathcal{T}_1 は S の一つの位相構造ということになる。 S に位相構造 \mathcal{T}_1 を定めて作られる位相空間 (S, \mathcal{T}_1) は、3点 a, b, c と全部で5つの開集合 $\phi, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, S$ をもつ位相空間ということになるよね。

- キャサリン：なるほどね、そういうことなのね。
- K氏：位相構造の話はひとまずこの辺でご勘弁願うとして、先に進もうか。。
- キャサリン：ご苦労様だけど,,, 願いますわ。

5.2.2 有界集合の上限・下限

有界な集合

定義 16. 実数 R の空でない部分集合 A が上に有界であるとは

$$a \in A$$

となる任意の a について $a \leq k$ となる a に無関係な定数 k が存在するときをいい、定数 k を集合 A の上界という。また、上に有界な集合 A の上界のうちで最小なものがあるときその数を A の上限といい

$$\sup A$$

で表す。

上に有界な集合というのは、集合 A から任意の数 a をとってきても、ある限界 k より大きくはならないということです。逆に集合 A が「上に有界でない」というのは、どんな大きな数 k をとっても A の中に $k < a$ となる数がある、ということです。また、上に有界な集合の上界はたくさんありますが、上限はあるとすれば1つしかないことに注意しておきましょう。

定義 17. 実数 R の空でない部分集合 B が下に有界であるとは

$$b \in B$$

となる任意の b について $b \geq k$ となる b に無関係な定数 k が存在するときをいい、定数 k を集合 B の下界という。また、下に有界な集合 B の下界のうちで最大なものがあるときその数を B の下限といい

$$\inf B$$

で表す。

ある集合が上にも下にも有界のとき、その集合は有界であるといえます。

定義 18. 有界な集合はその上限、下限ともに存在する。

- キャサリン：いま k が A の上界とすると $k \leq k'$ なる k' も明らかに A の上界となるから、 A の上界はたくさんあることになる。そのたくさんある上界の中で、一番小さい上界を A の上限といって $\sup A$ で表すのね。
- K氏：ピンポーン。上に有界な集合の上界はたくさんあるね。ある数 k が集合 A の上界のとき、 $k \leq p$ となる数 p はすべて集合 A の上界だね。同様に、下に有界な集合の下界もたくさんあることになる。有界な集合 A に入っている数 a については、 $|a| \leq k$ となる定数 k が必ず存在する。逆にこうなるような定数 k を持つ集合は有界ということになる。だから、有界集合とは $-k$ から k の範囲に収まってしまう集合ということになるね。
- キャサリン：何か例があるかしら？
- K氏：OK。例えば閉区間 $[a, b]$ とか开区間 (a, b) は有界だね。自然数の集合は下に有界。整数の集合は上にも下にも有界でない。また、 $A = \left\{ a_n \mid a_n = \frac{n+1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ は有界だ。実際、 $A \subset [1, 2]$ となるね。 $A = \{\sin x \mid x \in R\}$ は有界。1 が上界の一つで -1 が下界の一つということだね。

5.3 コンパクト性

定義 19. 実数の部分集合 A の任意の開被覆 $G_\alpha = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ が与えられたとき、その中から適当な有限個の开区間を選んで

$$A \subset (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n)$$

とできるとき A はコンパクトである、あるいはコンパクト集合であるという。このとき、開被覆 $\{G_\alpha\}$ は有限部分開被覆をもつという。

いきなり難しい用語がでてきましたが、吃驚しないでください。以下に上の定理を噛み砕いて調べていくことにします。

5.3.1 開被覆

開被覆とは読んで名のごとく、開集合である区間を覆うことでは ... とイメージできますが、ちゃんとした定義は次のようになります。

定義 20. 数直線 R の部分集合を X とする。开区間の集まりである开区間族 $\{U_\alpha\} = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ が

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

となっているとき、この开区間の族 $\{U_\alpha\}$ は X を被覆するといい、この族を X の開被覆という。要するに、これらの开区間を全部寄せ集めると X が覆われてしまうということです。

[注] α はこれらの开区間につけられた名前前で、 α は集合 A の中を動きます。例えば、 α が自然数の中を動くのなら、 $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ と書けばいいが、 α が実数の中を動いているときは、こういう書くわけにはいかないのだから $\alpha \in A$ としています。

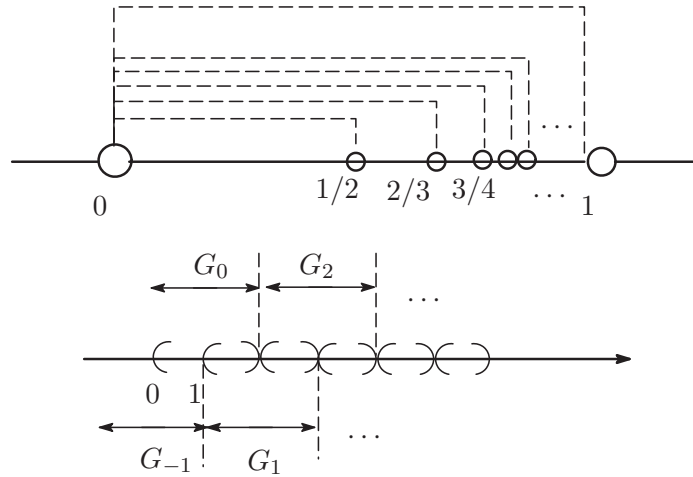
- キャサリン：具体的イメージをつかめるような例をあげていただけないかしら。
- K氏：そうだね。ちょっとわかりにくいよね。例えば実数 R の开区間 $(0, 1) = A$ の部分集合である开区間 $[1/n, 1 - 1/n] = I_n$ を考えると、 n を 2 から無限大の場合まで寄せ集めていくとこれは A になることが分かる。つまり、集合 I_n を $n = 2$ から無限大まで集めた「集合の集合」は开区間 $(0, 1)$ の被覆ということになるんだね。
- キャサリン：なるほどね。开区間の両端は「開」だから、無限の極限までアプローチしていかなければ覆いつくせないということ、开区間だったら両端の値は明確に決まっているから、無限の極限にまで迫る必要がない。。というような気がするんだけど、どうかしら？
- K氏：鋭いところを突くじゃないか。後でもう一度でてくるが、开区間の場合は、有限個の开区間でその开区間を覆うことができるが、开区間の場合は、一般には有限個の开区間で覆うことはできない、ということが大事なポイントだね。つまり、これが开区間と开区間の大きな違いを表しているんだ。
さて、それでは 2, 3 例をあげるね。例 1 と例 2 は开区間 $(0, 1)$ を対象としており、例 3 と 4 は开区間 $(0, 1)$ を対象としている。

[例 1] $G_n = \left(0, \frac{n}{n+1}\right)$, $n = 1, 2, \dots$ とすると $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ は开区間 $X = (0, 1)$ の開被覆である。

- K氏：この例題は下の図を見れば分かるよね。开区間だから無限個の和で覆う必要があるという例だね。

[例 2] $G_n = (n, n + 2)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ は数直線 R の開被覆である。

- K氏：例 2 も例 1 と同じだね。特に説明は不要だろう。



- キャサリン：OKよ。开区間の場合はよく分かったわ。次に閉区間の被覆について説明していただける。
- K氏：了解，次の例を調べてみよう。

[例3] $\left\{ \left(-1, \frac{n}{n+1} \right), \left(\frac{m}{m+1}, 2 \right) \right\}$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) は閉区間 $[0, 1]$ の開被覆である。

- K氏：この例の場合， m と n はばらばらな値をとるよ。 n, m とも無限大になると $\{(-1, 1), (1, 2)\}$ となってしまって閉区間 $[0, 1]$ の開被覆とはならないが，いずれかが有限であれば開被覆となるよね。ところで今の場合，そんなうるさいことを言わなくても $m = 1, n = 2$ の場合を捉えると

$$[0, 1] \subset \left(-1, \frac{2}{3} \right) \cap \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$$

となり，2つの开区間で覆うことができるよね。

- キャサリン：よく分かるわ。
- K氏：それじゃ次の例を見てみよう。

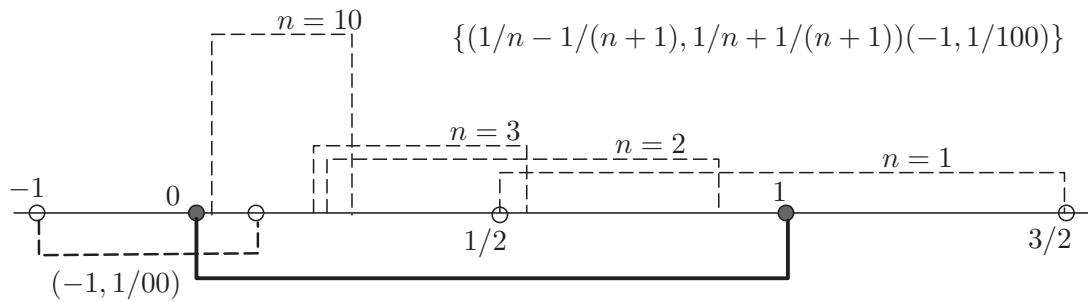
[例4] $\left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right), \left(-1, \frac{1}{100} \right) \right\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は閉区間 $[0, 1]$ の開被覆である。

- K氏： $n = 1$ から 10 まで変えたときの $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ の値を計算すると となる。これを

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.166	0.083	0.05	0.033	0.023	0.017	0.013	0.011	0.009
1.5	0.833	0.583	0.45	0.366	0.309	0.267	0.236	0.211	0.190

ベースに絵を描くと（スケールはええ加減），下の図のようになる。

- キャサリン：とすると $n = 10$ 個で覆うことができるというわけ？
- K氏：そういうことだね。開集合の合計数としては $10+1$ 個の 11 個になるというわけだね。



- K氏：さて，上の例に見られたように，閉区間の場合は，有限個の開区間を選んで，要素の閉区間を覆うことができた¹⁹けど，开区間の場合にはそのような訳にはいかない。有限個の開区間で要素の开区間を覆うことは，一般にはできないということなんだ。もちろんできる場合もあるけど。ともかく，これが閉区間と开区間の大きな違いということ覚えておこう。
- キャサリン：Open と Close で大きな違いがでてくるのね。
- K氏：そういうことだね。さて，それでは次にコンパクトの話に入ろうか。

5.3.2 コンパクト

定義 16 の繰り返しになりますが，改めてコンパクトの定義を以下に与えておきます。

定義 21. 実数の部分集合を X とする。 X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\} = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ について，常にそれらの中から有限個の開区間 U_1, U_2, \dots, U_n を選んで，それらだけで X が被覆できるとき，つまり

$$X \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

とできるとき， X はコンパクトであるという。

- キャサリン：う～ん，まず実数の部分集合 X は閉区間か开区間か明確に述べられていない点気になるわ。。え～っと， X を有限開被覆できるということから， X は閉区間かなと思ったけど，开区間でも有限開被覆できる場合があるわけね，だから， X を閉区間と一意的に決め付けられないというわけか。
- K氏：そうだね。
- キャサリン：コンパクトって国語的には小型で中身が充実しているとか，無駄を省いて小さくまとまっている，ギッシリ詰まっているとかいう意味よね。つまり有限個の区間列で被覆できるということはギッシリ詰まっているというイメージで捉えれば分かりやすいわね。
- K氏：お任せします。。さて，次に有名な「ハイネ・ボレルの被覆定理」に進もうと思うのだけど，その前に区間縮小法の知識が必要なので，まずそれから取り掛かるうか。

on 区間縮小法区間の縮小列の定義を示します。

¹⁹単純な例：开区間 $(-1, 2)$ は閉区間 $[0, 1]$ の開被覆である

定義 22. 开区間 (a_n, b_n) または閉区間 $[a_n, b_n]$ の区間の列を $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ とする。この列が

$$I_n \supset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

となっているとき、この列 $\{I_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ を区間の縮小列という。区間がすべて閉区間のとき、閉区間の縮小列といい、すべて开区間のとき、开区間の縮小列という。

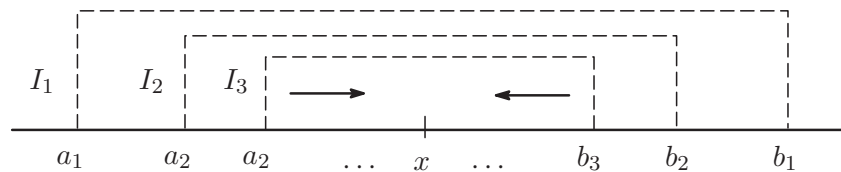
开区間の縮小列 ((1), (2)), 閉区間の縮小列 ((3), (4)) の例を以下に上げておきます。

$$(1) \quad I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(2) \quad I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(3) \quad I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(4) \quad I_n = \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right], n = 1, 2, 3, \dots$$



- キャサリン：区間縮小というのは、読んで字のごとく区間が中へ中へと縮んでいくことね。Kさんの描いてくれた絵をじっと見ていると、閉区間の縮小列の場合は、最終的に何かの数値に行き着くんじゃないかと思われるけど、开区間の場合はどうなんだろうと思ったりするわ。
- K氏：グホッ！あいかわらず鋭いね。そのあたりのことを次に調べてみよう。結論から先に言ってしまうと、閉区間の縮小列は、ただ一つの実数を定める、というもので、これは区間縮小法の原理と呼ばれているんだ。一方开区間の場合は、キャサリンが指摘したように区間の両端が入っていないために、行き着く先は何もない空虚にたどり着くことがある、ということなんだ。なんとも割り切れない気持ちが残るよね。。。それでは开区間縮小列の性質から調べていこうか。

开区間縮小列の性質

上の开区間の縮小列 (1) は、 $n \rightarrow \infty$ にすると両端が徐々に縮まっていき、最終的には 1 に収束しそうですね。つまり、すべての区間に共通な数として 1 が決まるということですから、これを記号で表すと、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}$$

となります。一方、(2) の場合は、区間の右端がだんだん 0 に近づいてきますが、このとき、これら区間の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ はどうなるのでしょうか。0 が含まれるように気がしますが、あいにく开区間である

ため、0 はどの区間にも含まれない。ここに开区間の特徴が如実に現れています。では、0 でない数 x が共通部分に含まれるか？。。 以下、このあたりを調べてみます。いま、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) \neq \phi$ として、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) \ni x$$

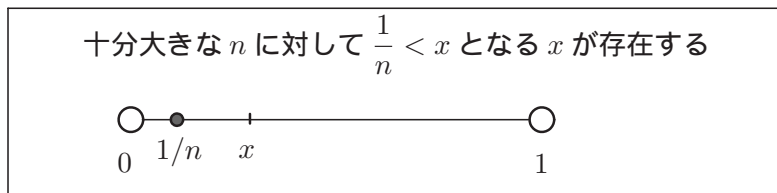
とします。明らかに $x > 0$ です。ところが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ですから、十分大きな n で $\frac{1}{n} < x$ となる n が存在します。したがって、

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) \not\ni x$$

となって矛盾します。したがって、どのような正数 x も开区間全体の共通部分に含まれることはなく、よって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \phi$$

となります。つまり、空でない开区間の縮小列の共通部分は空になることがあるということです。このようなことは閉区間の縮小列では起き得ないことです。



閉区間縮小列の性質

閉区間縮小列の性質については、証明なしで次の定義を載せておきます。

定義 23. 閉区間の縮小列はただ 1 つの実数 α を定める。すなわち、 $\{I_n\}$ を閉区間の縮小列とするとき、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$$

となる実数 α がただ 1 つ存在する。

閉区間縮小法の原理を使って、次の有用な定理 (デデキントの切断を参照) を証明します。

定義 24. 任意の実数 α について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となる有理数の数列 $\{a_n\}$ が存在する。

【証明】任意の実数を α とする。

$$n_1 \leq \alpha < n_1 + 1$$

となる整数 n_1 をとり, $a_1 = n_1$ とする。次に区間 $[n_1, n_1 + 1]$ を 10 等分して

$$n_1 + \frac{n_2}{10} \leq \alpha < n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{1}{10}$$

となる区間をとり, $a_2 = n_1 + \frac{n_2}{10}$ とする (n_2 は 10 未満の正整数)。同様に, 区間 $[n_1 + \frac{n_2}{10}, n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{1}{10}]$ を 10 等分して

$$n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{n_3}{10^2} \leq \alpha < n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{n_3}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

なる区間を取り, $a_3 = n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{n_3}{10^2}$ とする (n_3 は 10^2 未満の正整数)。同じことを繰り返していくと,

$$a_k = n_1 + \frac{n_2}{10} + \frac{n_3}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^{k-1}} \quad (n_2, n_3, \dots, n_k \text{ は } 10^{k-1} \text{ 未満の正整数})$$

という有理数の数列 $\{a_k\}$ が作れるが, この数列は単調増加有界数列で α に収束する。(証明終了)

5.3.3 ハイネ・ボレルの被覆定理

上で勉強したコンパクトという概念を使います。

定義 25. 閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである。

これがハイネ・ボレルの被覆定理と呼ばれるものです。もう少し文章を補足すると閉区間 $[a, b]$ の任意の開被覆を $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ とするとき, このうちから有限個の開区間を選んで,

$$[a, b] \subset (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$$

とできる。

【証明】閉区間を $[a, b]$ とする。 $[a, b]$ の開被覆を $\{U_\alpha\}$ とする。証明は背理法を使う。いま, 閉区間 $[a, b]$ が有限個の U_α で覆えないと仮定する。区間 $[a, b]$ を真ん中で分けて, 2 つの閉区間 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ と $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ を作る。この 2 つの区間のうち, 少なくとも一つは有限個の U_α で覆えない。というのは, どちらも有限個で覆えるなら全体が有限個で覆えることになり矛盾するから。そこで, 覆えない方の区間を改めて $[a_1, b_1]$ とする (仮に, どちらの区間も有限個で覆えないならどちらを選んでもよい)。

区間 $[a_1, b_1]$ を再び 2 等分し, それぞれの区間を $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ とする。これら 2 つの区間のうち, 少なくとも一方は有限個の U_α では覆えない。そこで前と同じように有限個の U_α で覆えない方の区間を改めて $[a_2, b_2]$ とし, 今までと同じ操作を繰り返して, 閉区間の縮小列

$$[a_n, b_n]$$

を作る。この縮小列は区間縮小法の原理により, これらの区間に共通なただ一つの実数

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

を定める。 x はこの閉区間の中の数だから

$$x \in U_\alpha$$

となり開区間 $U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ がある。 U_α は開集合だから, x のある近傍 $U_\epsilon(x)$ で

$$U_\epsilon(x) \subset U_\alpha$$

となるものがある。また, 区間の縮小列において, 区間の長さ $|b_n - a_n|$ は 0 に収束するから n を十分大きくとると $|b_n - a_n| < \epsilon$ とできる。このとき, $x \in [a_n, b_n]$ だから, この区間 $[a_n, b_n]$ は x を中心とする長さ 2ϵ の開区間である $U_\epsilon(x)$ に含まれる。すなわち,

$$[a_n, b_n] \subset U_\epsilon(x) \subset U_\alpha$$

となるが, これは $[a_n, b_n]$ が有限個の U_α には含まれないことに反する。よって開被覆の中から有限個を選んで閉区間を覆うことができる。(証明終り)

6 関数の連続性

6.1 連続ということ - イプシロン - デルタ方式

お馴染みのイプシロン - デルタ方式による連続の定義は次のようになります。

定義 26. 《 $\epsilon - \delta$ 式の定義》

関数 $f(x) : R \rightarrow R$ について, a と $f(a)$ を考える。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となるとき, f は a で連続であるという。いい換えると, $\forall \epsilon > 0$ について

$$|x - a| < \delta \quad \text{なら} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{となる} \quad \delta > 0 \quad \text{が存在する}$$

とき, 関数 $y = f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。また, すべての a で連続のとき, 関数は連続であるという。

また, 次のように言う事もできる。

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるための必要十分条件は, 実数 a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

となることである。

- キャサリン : 大学初学年で学ぶ解析学で必ずお目にかかるイプシロン - デルタ方式ね。この方式で連続性を示す例題を示していただけませんか？
- K 氏 : 了解。普通の関数では面白くないので次の関数を調べてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (6)$$

この関数が $x = 0$ で連続であることを示そう。 $|\sin(1/x)| \leq 1$ だね。任意の ϵ について δ を $0 < \delta < \epsilon$ となるようにとるよ。そうすると $|x - 0| < \delta$ となる x について

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta < \epsilon$$

となるから $x = 0$ で連続ということになる。

- キャサリン：なるほどね。

さて、連続関数の性質を以下にあげておきます。証明は略しますので、必要な方は適当なテキストを参照ください。

連続関数の性質

中間値の定理： 連続関数 $y = f(x)$ で $f(a) < 0, f(b) > 0 (a < b)$ のとき、

$$f(c) = 0 (a < c < b)$$

となりうる c が少なくとも 1 つ存在する。

有界性： 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数はこの区間で有界である。

Weierstrass の定理： 閉区間 $[a, b]$ 上で連続な数 $y = f(x)$ は最大値と最小値をもつ。

Roll の定理： 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能とする。 $f(a) = f(b) = 0$ を満たすとき、 $a < c < b$ で $f'(c) = 0$ となる c が少なくとも 1 つ存在する。

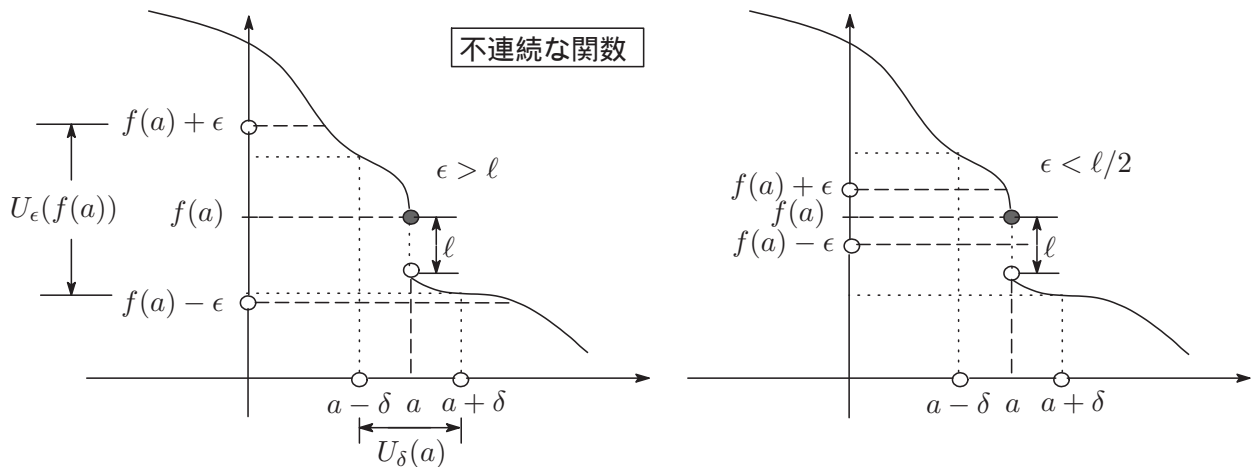
連続関数の四則演算

$f(x), g(x)$ が連続のとき、次の関数は連続関数である。

- (1) $f(x) \pm g(x)$
- (2) $f(x) \cdot g(x)$
- (3) $f(x)/g(x)$
- (4) $f(g(x))$ この関数は $f(x)$ と $g(x)$ の合成といい、 $(f \circ g)(x)$ とも書かれます。

6.2 連続ということ - 近傍を使った連続の定義

次に、今まで勉強してきた近傍の考えを取り入れて関数の連続性を考えることとします。 $f(a)$ の近くの点、つまり、 ϵ 近傍を $U_\epsilon(f(a))$ とします。これは $f(a)$ を中心とする幅 2ϵ の開区間 $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ ですね。次に、点 $x = a$ の近くの点、すなわち a の δ 近傍を $U_\delta(a)$ とします。これは a を中心とする幅 2δ の開区間 $(a - \delta, a + \delta)$ のことです。さて、次のグラフをよく見ましょう。いま、もし ϵ があまり小さくないとすれば、 δ を小さくおけば、開区間 $(a - \delta, a + \delta)$ は f によって開区間 $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ の中に移されることが分かります。しかし、 ϵ をうんと小さく、例えば ϵ を図の ℓ の長さの半分より小さく取っておくと、 δ をいくら小さくおいても、開区間 $(a - \delta, a + \delta)$ を開区間 $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ の中に移すことはできません。ということで、この場合、関数 $f(x)$ は点 a で不連続であるということ



になります。さて、そこで関数の連続性を、先ほどの $\epsilon - \delta$ 方式のような絶対値を使わずに近傍という言葉を使って定義を言い換えてみますと

定義 27. 《近傍を使った連続の定義》

関数 $f(x) : R \rightarrow R$ について、 a と $f(a)$ を考える。 $f(a)$ の任意の近傍 $U_\epsilon(f(a))$ に対して、 a の δ 近傍 $U_\delta(a)$ で

$$f(U_\delta(a)) \subset U_\epsilon(f(a))$$

となるような δ が存在するとき、関数 $f(x)$ は a で連続であるという。また、すべての a で連続のとき、関数は連続であるという。

- キャサリン: 近傍を使った定義では、 a の δ 近傍にあるすべての点が、 $f(a)$ の任意の ϵ 近傍内にすっぽりと移すことができる場合、関数 $f(x)$ は点 a で連続であるということね。逆に言うと、 $f(a)$ のどのような ϵ 近傍 $U_\epsilon(f(a))$ をとっても、 f によってその中に移されるような a の δ 近傍 $U_\delta(a)$ が存在する、というのが近傍による関数の連続性の定義ということね。
- K氏: そうだね。そこで写像を使った連続の定義を次に見てみよう。その前に、念のために関数と写像に関する定義の復習を少しやっておくね。「2つの集合 A, B において、ある対応によって A のどの要素にも B の要素が1つずつ対応しているとき、この対応を A から B への写像といい、記号 f などを用いて

$$f : A \rightarrow B$$

と書き表す。写像 $f : A \rightarrow B$ において集合 A を定義域という。 A の要素 a に対応する B の要素を $f(a)$ と書き、これを f による a の像、または f の a における値という。また、値全体の集合 $\{f(a) | a \in A\}$ を写像 f の値域という。定義域と値域がともに数の集合である写像を関数という」というところかな。

また、逆像については、定義 10 より、「 B の部分集合 D に対して、 $f(a) \in D$ となるような集合 A の要素 a を写像 f による集合 D の逆像といい、 $f^{-1}(D)$ で表す。逆像の定義から $x \in f^{-1}(D) \iff f(x) \in D$ が成り立つ」となっているよね。任意の写像 $f : X \rightarrow Y$ と Y の任意の部分集合 B に対して、 f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ は常に存在するし、 $f^{-1}(B)$ は $f(x) \in B$ をみたすような A の要素 x 全体の集合、というところで復習を終わっておこうか。

7 連続写像と開集合

連続写像は連続関数を一般化した概念です。連続写像の定義は、次のように与えられます。

定義 28. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるとは、 Y の任意の開集合 U に対して、その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることである。

簡単に言えば、開集合（閉集合）の逆像がまた開集合（閉集合）になるときに f を連続写像という、というところでしょうか。

定義 29. 実数から実数への関数 $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続である必要十分条件は、 \mathbb{R} の任意の開集合 U に対して、その逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合となることである。

【証明】 \mathbb{R} の任意の開集合を U とし、その逆像を $V = f^{-1}(U)$ とします。 $V \ni a$ とすると、定義 10 より $f(a) \in U$ となります。 U は開集合ですから、定義 14 より

$$U_\epsilon(f(a)) \subset U$$

となる $f(a)$ の近傍 $U_\epsilon(f(a))$ があります。この近傍について、関数の連続性より

$$f(U_\delta(a)) \subset U_\epsilon(f(a))$$

となる a の δ 近傍 $U_\delta(a)$ がとれます。したがって、この逆像 f^{-1} をとれば

$$U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(a))) \subset f^{-1}(U)$$

となり、したがって $f^{-1}(U)$ は開集合である、ということになります。

定義 30. 実数から実数への関数 $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について、 \mathbb{R} の任意の開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合となるとき、関数 $f(x)$ は連続である。

【証明】 $f(a)$ の任意の ϵ 近傍を $U_\epsilon(f(a))$ とします。 ϵ 近傍は開集合ですから、その逆像 $f^{-1}(U_\epsilon(f(a)))$ は開集合です。

$$a \in f^{-1}(U_\epsilon(f(a)))$$

だから、 a のある δ 近傍 $U_\delta(a)$ で

$$U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(a)))$$

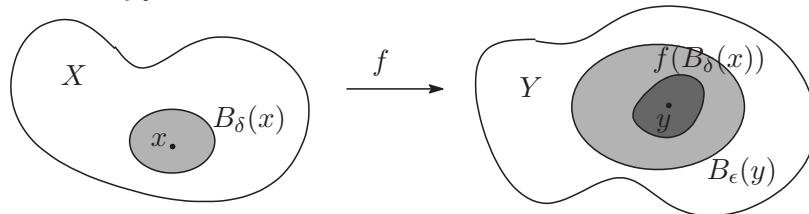
となるものがとれます。したがって、

$$f(U_\delta(a)) \subset U_\epsilon(f(a))$$

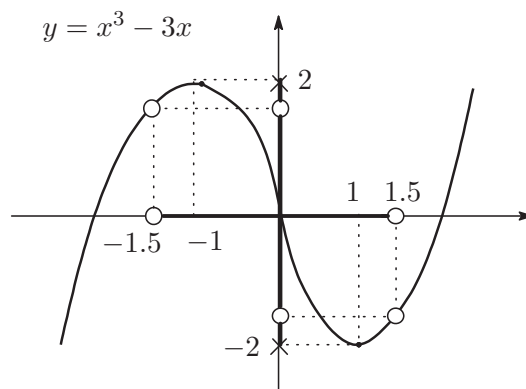
となり、 $f(x)$ は連続、ということになります。

- キャサリン：う～ん，これらの定義は何を言いたいのかすぐにはピンとこないけど。。。
- K氏：定義 27 をもう一度読み解くと，関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは， $f(a)$ のどんな近傍 $U_\epsilon(f(a))$ であっても， a の適当な近傍 $U_\delta(a)$ をとれば，その近傍の像 $f(U_\delta(a))$ が $U_\epsilon(f(a))$ に含まれる $f(a)$ の近傍となるようにできる，ということだね。これは，逆に言えば，点 $f(a)$ を含む任意の近傍の f による逆像がまた a の近傍であるとき， f は a において連続であるということと同じことだ。先ほどの不連続な関数の図をよく眺めてごらん。不連続関数の場合には，開区間 $(a - \delta, a + \delta)$ を開区間 $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ の中に移すことはできないということだよ。そして， f が R 全体で連続であるということは，単に R の任意の開集合の逆像が開集合となることと同じ，ということなんだ。WEB(<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/fsakai/htop1.html>) から拝借してきたのが下の図だが， $f(B_\delta(x))$ が $B_\epsilon(y)$ にすっぽりと収まっているところが分かりやすいだろう。

写像 $f : X \rightarrow Y$ が点 $x \in X$ において連続であるとは， $y = f(x)$ とするとき，任意の正数 ϵ に対して正数 δ が存在して， $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(y)$ が成立することをいう。さらに，写像 f が X のすべての点で連続であるとき， f は連続写像であるという。



- キャサリン：なんとなく分かってきたわ。ただ，どうして関数の連続性を定義するとき，逆像を使うのかしら？ 普通の写像ではだめなの？
- K氏：いいとこ突いてくるね！ 実は，関数が連続でも開集合の像が開集合とはならないことがあるんだ。下のグラフを見てごらん。开区間 $(-1.5, 1.5)$ は極大と極小を挟んでいるからこの区間の像は閉区間 $[-2, 2]$ となるだろう。



- キャサリン：なるほどね。そういうことなんだ。